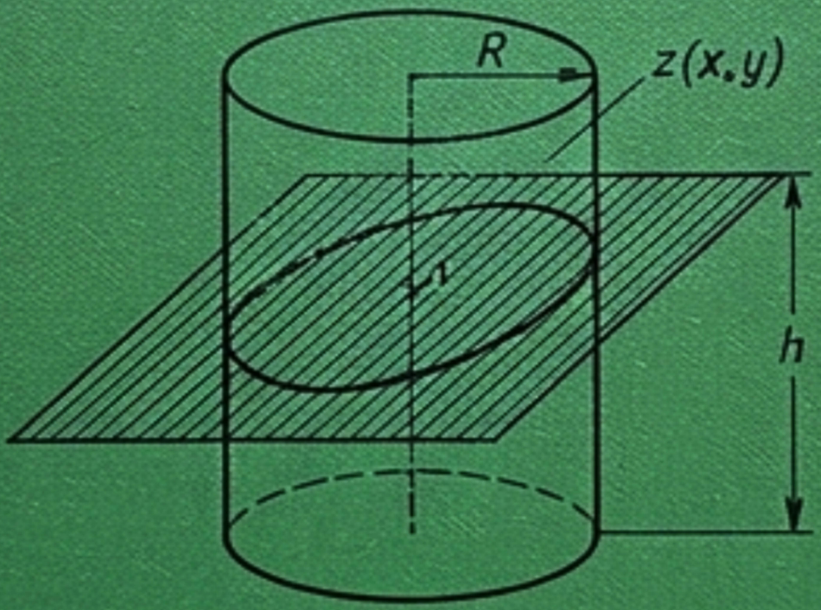
Р. М. ЖЕВНЯК
А. А. КАРГІУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



Часть 2

Р. М. ЖЕВНЯК,
А. А. КАРПУК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ч. II

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1985

ББК 22.11я73
Ж 45
УДК 51(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института и *М. В. Федорюк*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института.

Ж $\frac{1702010000-164}{M\ 304(05)-85}$ 17—85

© Издательство «Вышэйшая школа», 1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

4. Векторные и комплексные функции действительного переменного 5

4.1. Векторные функции скалярного аргумента 5

4.2. Комплексные числа 10

4.3. Многочлены 17

5. Интегральное исчисление функций одной переменной 22

5.1. Первообразная 22

5.2. Интегрирование рациональных функций 30

5.3. Интегрирование некоторых иррациональных функций и тригонометрических выражений 38

5.4. Определенный интеграл 47

5.5. Формула Ньютона — Лейбница 56

5.6. Методы вычисления определенных интегралов . . . 59

5.7. Геометрические приложения определенных интегралов 66

5.8. Гладкие кривые в пространстве 77

5.9. Физические приложения определенного интеграла 92

5.10. Несобственные интегралы 97

6. Функции многих переменных 113

6.1. Множества на плоскости и в пространстве 113

6.2. Предел и непрерывность функций многих переменных . . . 117

6.3. Дифференцируемость функций многих переменных . . . 124

6.4. Производная по направлению. Градиент 133
6.5. Геометрический смысл дифференцируемости функций многих переменных 138
6.6. Производные и дифференциалы высших порядков . 142
6.7. Неявные функции 150
6.8. Экстремум функций многих переменных . 162
6.9. Условный экстремум 168

7. Интегралы, зависящие от параметра . . 179

7.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра . . 179
7.2. Функциональные последовательности 186
7.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра 189
7.4. Интегралы Эйлера 197
7.5. Асимптотическое интегрирование 203
Ответы 214
Литература 219

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является второй частью учебного пособия «Высшая математика» для студентов высших технических учебных заведений. В ней излагаются алгебра комплексных чисел и теория многочленов с действительными коэффициентами, интегральное исчисление функций одной переменной, элементы дифференциальной геометрии, дифференциальное исчисление функций многих переменных, а также описывается метод асимптотического интегрирования, который впервые включен в программу по высшей математике для студентов втузов.

Теоретические положения иллюстрируются большим количеством примеров. В конце каждого параграфа предлагаются задачи для самостоятельного решения, большинство из них снабжены ответами.

Пособие написано на основе лекций, читаемых авторами в Минском радиотехническом институте свыше 10 лет. Авторы стремились следовать той схеме изложения материала, которая предусмотрена новой программой курса высшей математики для втузов. Дифференциальное исчисление функций многих переменных и теория интегралов, зависящих от параметра, рассматриваются в данном пособии в объеме, превосходящем предусмотренный программой, что объясняется методическими особенностями изложения указанных разделов.

Нумерация глав, параграфов, формул и рисунков в этой части продолжает соответствующую нумерацию первой части книги. Начало доказательства теорем, решение примеров и задач отмечено знаком □, конец — знаком ■.

Авторы приносят глубокую благодарность рецензентам: доктору физико-математических наук, профессору Московского физико-технического института М. В. Федорюку, заведующему кафедрой высшей математики Московского энергетического института, доктору физико-математических наук, профессору С. И. Похожаеву и профессору этой кафедры М. Л. Краснову за сделанные ими при рецензирова-

нии замечания, способствующие улучшению книги, а также выражают признательность доктору физико-математических наук, профессору Л. Д. Кудрявцеву за полезные советы, высказанные при обсуждении книги.

Авторы понимают, что написание учебного пособия по высшей математике для втузов является весьма трудной задачей. Поэтому они с благодарностью примут все пожелания по содержанию и оформлению книги, которые просят направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

4. ВЕКТОРНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4.1. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Понятие векторной функции скалярного аргумента. *Векторной функцией* или *вектор-функцией скалярного аргумента* называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in \mathrm{T}$ ставит в соответствие определенный вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Если в пространстве выбран базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, то задание вектор-функции равносильно заданию трех числовых функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, являющихся ее координатами, т. е.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} = (x(t),\ y(t),\ z(t)),\ t \in \mathrm{T}. \qquad (4.1)$$

Геометрически вектор-функцию удобно представить, если построить множество точек в пространстве с радиус-векторами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \mathrm{T}$, выходящими из фиксированной точки O. Это множество называется *годографом* вектор-функции (рис. 4.1). При этом говорят, что функция $\mathbf{r}(t)$ задает параметрическое представление годографа с параметром t.

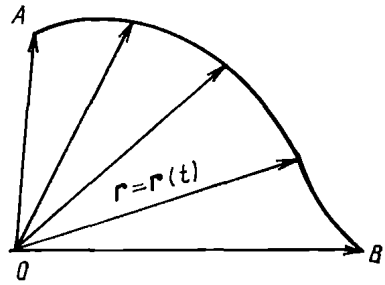


Рис. 4.1

Пример 1. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Годографом этой функции является эллипс, параметрические уравнения которого, согласно равенству (4.1), есть

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t; \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Действительно, исключив отсюда параметр t, получим $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс с полуосями a и b.

Постоянный вектор $\mathbf{a}$ называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, за исключением, быть может, самой точки t_0, и если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех t, таких, что $0 < |t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$.

Геометрически неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon$ означает, что длина вектора $\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}$ становится меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$, если только $|t - t_0| < \delta$ (рис. 4.2).

Если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, то неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon$ в координатной записи имеет вид

$$\sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1; \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2; \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{4.3}$$

В самом деле, пусть $\mathbf{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства $0 < |t - t_0| < \delta$ следует неравенство (4.2). Отсюда при $0 < |t - t_0| < \delta$ получаем

$$|x(t) - a_1| < \varepsilon; \quad |y(t) - a_2| < \varepsilon; \quad |z(t) - a_3| < \varepsilon,$$

что и доказывает справедливость соотношений (4.3).

Пусть теперь равенства (4.3) выполнены. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся положительные числа δ_1, δ_2 и δ_3, такие, что $|x(t) - a_1| < \varepsilon/\sqrt{3}$ при $0 < |t - t_0| < \delta_1$; $|y(t) - a_2| < \varepsilon/\sqrt{3}$ при $0 < |t - t_0| < \delta_2$ и $|z(t) - a_3| < \varepsilon/\sqrt{3}$ при $0 < |t - t_0| < \delta_3$ соответственно. Положив теперь $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, получим

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} < \\ < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$.

Свойства пределов вектор-функций могут быть легко получены с помощью условия (4.3) и соответствующих свойств пределов числовых функций.

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Очевидно, что для непрерывности $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0, согласно условиям (4.3), необходимо и достаточно, чтобы при $t = t_0$ были непрерывными координатные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Производная векторной функции скалярного аргумента. Введем понятие производной вектор-функции в данной точке t_0. Для этого придадим аргументу t_0 приращение $\Delta t \neq 0$ и рассмотрим вектор $\Delta\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ (рис. 4.3). Составим отношение

$$\frac{\Delta\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

являющееся вектором, коллинеарным вектору $\Delta\mathbf{r}(t_0)$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}, \tag{4.4}$$

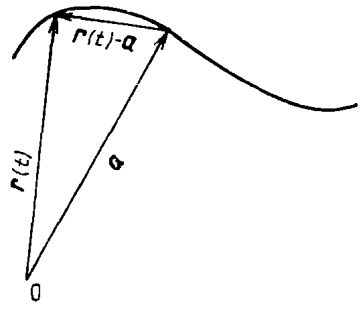


Рис. 4.2

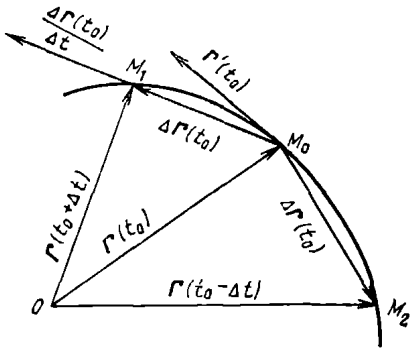


Рис. 4.3

то он называется *производной вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ в данной точке t_0 и обозначается $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Таким образом, производная вектор-функции в данной точке есть вектор.

Выясним геометрический и механический смысл вектора $\mathbf{r}'(t_0)$. Покажем, что если вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ существует, то он направлен по касательной к годографу функции $\mathbf{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t. В этом и заключается геометрический смысл производной вектор-функции.

Действительно, вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ параллелен вектору секущей M_0M_1 к кривой (рис. 4.3). В пределе при $M_1 \to M_0$, что соответствует стремлению Δt к нулю, вектор секущей $\mathbf{M_0M_1}$ займет положение касательной в точке M_0, а значит, и вектор $\mathbf{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$, параллельный предельному положению вектора секущей $\mathbf{M_0M_1}$, также будет направлен по этой касательной.

Покажем теперь, что вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ направлен в сторону возрастания параметра t. В самом деле, векторы $\Delta \mathbf{r}(t_0)$ и $\frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ лежат на одном и том же луче. Если $\Delta t > 0$, то эти векторы направлены в сторону возрастания t. Если $\Delta t < 0$, то вектор $\Delta \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{M_0M_2}$ направлен в сторону убывания t, а вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ снова будет направлен в сторону возрастания t.

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ с механической точки зрения задает закон движения материальной точки по кривой, являющейся годографом. Так как производная есть скорость изменения функции в данной точке, то $\mathbf{r}'(t_0)$ является скоростью движения материальной точки по этой кривой, направленной по касательной к кривой в сторону возрастания t.

Из того, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} =$$

$$\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right),$$

получаем, что наличие производной $\mathbf{r}'(t_0)$ равносильно существованию производных $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ и $z'(t_0)$, причем справедливо равенство

$$\mathbf{r}'(t_0)=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))=x'(t_0)\mathbf{i}+y'(t_0)\mathbf{j}+z'(t_0)\mathbf{k}, \quad (4.5)$$

$$|\mathbf{r}'(t_0)|=\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}.$$

Итак, *вычисление производных векторной функции сводится к вычислению производных ее координат.*

Пример 2. Найти производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)=\cos 2t\mathbf{i}+(\sin t-1)\mathbf{j}+\operatorname{tg} t\mathbf{k}$ в точке $t_0=\frac{\pi}{4}$.

$$\square\ \mathbf{r}'(t)=-(2\sin 2t)\,\mathbf{i}+(\cos t)\,\mathbf{j}+\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathbf{k};$$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}.\ \blacksquare$$

Получим уравнение касательной к кривой, являющейся годографом вектор-функции, в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

Поскольку для функции $\mathbf{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ направляющий вектор касательной в точке, соответствующей значению t_0, есть $\vec{\tau}=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0))$, то, согласно уравнению (1.45), уравнение касательной запишется следующим образом:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}. \quad (4.6)$$

Плоскость, перпендикулярная к касательной в точке касания, называется *нормальной плоскостью* к кривой в этой точке. Согласно формуле (1.51), ее уравнение имеет вид

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0. \quad (4.7)$$

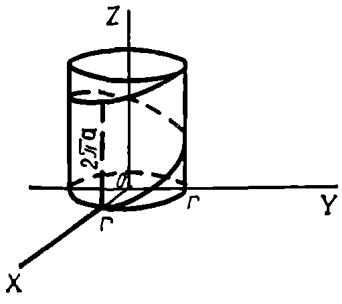


Рис. 4.4

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к винтовой линии

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=at \quad (4.8)$$

при $t_0=\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.4).

$\square$ При изменении параметра t от 0 до 2π проекция точки этой кривой на плоскость XY описывает окружность радиуса r, сама же точка при этом по винтовой линии поднимается ($a>0$) или опускается ($a<0$) на величину $2\pi a$, называемую шагом винтовой линии.

Находим $\vec{\tau} = \left(x'\left(\frac{\pi}{2}\right), y'\left(\frac{\pi}{2}\right), z'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-r, 0, a)$. Параметру $t_0 = \frac{\pi}{2}$ отвечает на винтовой линии точка $M_0 = \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right), z\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(0, r, \frac{a\pi}{2}\right)$. Поэтому искомые уравнения касательной и нормальной плоскости, согласно уравнениям (4.6) и (4.7), имеют соответственно вид

$$\frac{x}{-r} = \frac{y-r}{0} = \frac{z - \frac{a\pi}{2}}{a} \quad \text{и} \quad 2rx - 2az + \pi a^2 = 0. \ \blacksquare$$

Для вектор-функций с праведливы формулы дифференцирования:

1) $[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$;
2) $[a\mathbf{r}(t)]' = a\mathbf{r}'(t)$, $a \in \mathbf{R}$;
3) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t))$;
4) $[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t)]$.

Все они доказываются аналогично формулам дифференцирования числовых функций. Для примера докажем формулу 3:

$$(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))'_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t), \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t)) - (\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0))}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t), \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t)) - (\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t))}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t)) - (\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0))}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t_0)}{\Delta t}, \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t)\right) +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \left(\mathbf{r}_1(t_0), \frac{\mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t}\right) = (\mathbf{r}_1'(t_0), \mathbf{r}_2(t_0) + (\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2'(t_0)).$$

Задачи и упражнения

1. Построить годограф векторных функций:

а) $\mathbf{r} = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{(t+1)^2}\mathbf{j}$; б) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$.

2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{t \to \pi}\left(\frac{\sin t}{t-\pi}\mathbf{i} + \frac{1+\cos t}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{\pi}\mathbf{k}\right)$;

б) $\lim\limits_{t \to 1}\left(\frac{e^t - e}{t-1}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{1-t}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\right)$.

3. На кривой $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, найти точку, скорость в которой направлена под углом $\alpha = \frac{\pi}{6}$ к оси X.

4. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ при $t_0 = 1$. Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью XY?

5. Показать, что нормальные плоскости к линии $x = a\sin^2 t$, $y = \frac{a \sin 2t}{2}$, $z = a\cos t$ проходят через начало координат при любом t.

Комплексные числа и действия над ними. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), которая записывается в виде $z = (x, y)$, при этом x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \mathrm{Re}z$ (фр. reel — действительный), а y — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $y = \mathrm{Im}z$ (фр. imaginair — мнимый).

Равенство, сумма и произведение двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ определяется следующим образом:

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2,\ y_1 = y_2), \tag{4.9}$$

т. е. два комплексных числа равны, если равны их действительные и их мнимые части;

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),\ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2), \tag{4.10}$$

т. е. для сложения двух комплексных чисел надо сложить их действительные и их мнимые части;

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{4.11}$$

Из формулы (4.10) следует, что $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. Легко проверить далее, что $z_1 z_2 = z_2 z_1$ и $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, где $z_3 = (x_3, y_3)$.

Рассмотрим комплексное число $e = (1, 0)$. Для него, согласно равенству (4.11), $e^2 = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0,\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (1, 0)$. Кроме того, для $z = (x, y)$ имеем $ez = (1x - 0y,\ 1y + 0x) = (x_1 y) = z$. Таким образом, комплексное число $e = (1, 0)$ в множестве комплексных чисел играет роль единицы.

Для комплексных чисел вида $z = (x, 0)$ имеем $z_1 z_2 = (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$, $z_1 + z_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$, т. е. операции над комплексными числами вида $(x, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами x. Поэтому комплексные числа вида $(x, 0)$ можно отождествить с действительными числами x и писать, $(x, 0) = x$. В силу этого комплексное число $e = (1, 0) = 1$, а $(-x\ 0) = -x = -x(1, 0)$.

Комплексное число $i = (0, 1)$, для которого $i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$, называется *мнимой единицей*. Используя мнимую единицу и равенство $(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = iy$, получаем, что $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$.

Итак, каждое комплексное число $z = (x, y)$ можно представить в *алгебраической форме* $z = x + iy$, где $i^2 = -1$.

Используя алгебраическую запись комплексного числа, введенные выше операции над комплексными числами можно записать так:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Отсюда видно, что правая часть последнего равенства получается как результат перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ с учетом того, что $i^2 = -1$. Далее из равенства $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ следуют равенства $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комп-

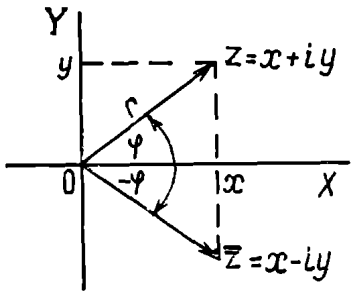


Рис. 4.5

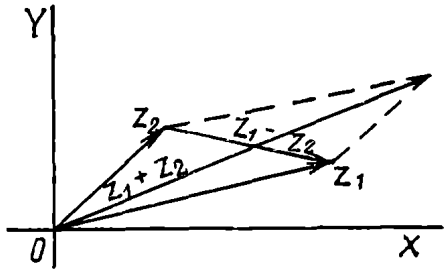


Рис. 4.6

лексному числу $z = x + iy$. *Модулем* комплексного числа $z = x + iy$ называется число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Нетрудно видеть, что $z\bar{z} = |z|^2$ и $|z| = |\bar{z}|$.

Определим операцию деления комплексных чисел. *Частным* двух чисел z_1 и z_2 будем называть такое число z, что $zz_2 = z_1$, и обозначать его $z = \frac{z_1}{z_2}$. Покажем, что частное двух чисел z_1 и z_2 определяется однозначно, если $z_2 \neq 0$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда, используя понятие сопряженного комплексного числа $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2 \neq 0$, находим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(мы умножили числитель и знаменатель на $x_2 - iy_2 = \bar{z}_2$).

Пример 1. $\frac{3 - 2i}{1 + 3i} = \frac{(3 - 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{3 + 6i^2 - 2i - 9i}{1 + 3^2} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Комплексное число $z = x + iy$ в декартовой системе координат XY изображается точкой плоскости с координатами (x, y). Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно-однозначным. Действительные числа $x = (x, 0)$ изображаются точками оси абсцисс, а мнимые числа вида $(0, y) = iy$ — точками оси ординат. Ось X называется *действительной осью*, а ось Y — *мнимой*. Такую плоскость в дальнейшем будем называть *комплексной плоскостью*.

Таким образом, комплексные числа изображаются точками комплексной плоскости.

Часто комплексные числа $z = x + iy$ геометрически изображаются вектором с началом в точке O и концом в точке (x, y). При такой интерпретации $|z|$ есть длина r изображающего это число вектора (рис. 4.5).

Используя векторную интерпретацию комплексных чисел, получаем, что расстояние между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ комплексной плоскости равно длине вектора $\mathbf{Z_1Z_2}$, т. е. $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Кроме того (рис. 4.6), справедливы неравенства:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||, \quad \forall z_1, z_2.$$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Муавра*. Обозначим через φ угол между осью X и радиус-вектором, изображающим число z, а через $r = |z|$. Тогда, как следует из рис. 4.5, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и для комплексного числа $z = x + iy$ получаем представление

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{4.12}$$

называемое *тригонометрической формой* комплексного числа.

Угол φ называется *аргументом* комплексного числа. В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ аргумент комплексного числа определен с точностью до величины, кратной 2π. Множество углов вида $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, обозначается $\operatorname{Arg} z$ (фр. argument — аргумент), где φ — угол, удовлетворяющий соотношению (4.12). Обычно считают, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ (или $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Значения φ аргумента комплексного числа, такие, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, обозначаются $\arg z$ и называются *главной ветвью* аргумента комплексного числа.

Таким образом,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Очевидно также, что $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi$, где $k = 0$ при $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $k = 1$ при $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$ и $k = -1$ при $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Для комплексного числа $z = 0$ имеет место равенство $|z| = 0$, а $\arg 0$ не определен.

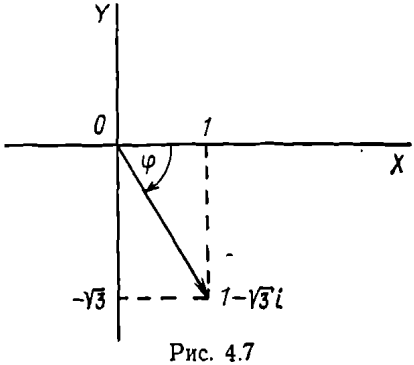


Рис. 4.7

Пример 2. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 - \sqrt{3}\,i$.

□ Находим $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$. Так как данное комплексное число находится в четвертой координатной четверти комплексной плоскости (рис. 4.7), то $\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) + 0 \cdot \pi = \frac{-\pi}{3}$. Поэтому

* А. Муавр (1667 — 1754) — французский математик.

$$1-\sqrt{3}\,i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right).\ \blacksquare$$

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$; $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ — два комплексных числа, где $r_1=|z_1|$; $r_2=|z_2|$; $\varphi_1=\arg z_1$; $\varphi_2=\arg z_2$.

Имеют место следующие равенства:

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \tag{4.13}$$

Для примера докажем первую формулу из равенств (4.13). Имеем

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+$$
$$+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Таким образом, $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+$ $+\arg z_2$; $\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$, т. е. при перемножении (делении) двух комплексных чисел модули их перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).

Методом математической индукции можно показать, что

$$z_1z_2\cdot\ldots\cdot z_n=r_1r_2\cdot\ldots\cdot r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)],$$

где $r_i=|z_i|$, $\varphi_i=\arg z_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. В частности, если $z_1=z_2=$ $=\ldots=z_n=z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то отсюда получаем *формулу Муавра*

$$z^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{4.14}$$

Обозначим

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi;\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi. \tag{4.15}$$

Соотношения (4.15) называются *формулами Эйлера**. Смысл этих обозначений будет выяснен в дальнейшем.

Из формул (4.15) находим, что

$$\varphi=\arg e^{i\varphi},\ |e^{i\varphi}|=|\cos\varphi+i\sin\varphi|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1;$$
$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2};\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{4.16}$$

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, т. е. справедливы равенства:

1°. $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. 2°. $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

3°. $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$.

---

* Л. Эйлер (1707 — 1783) — выдающийся математик швейцарского происхождения, большую часть жизни проработавший в России.

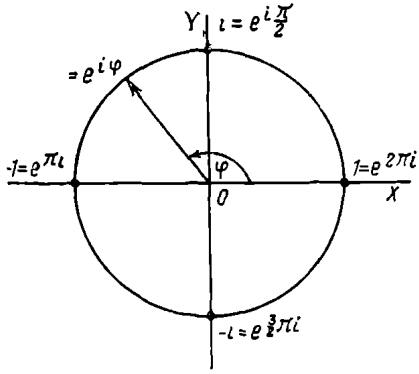


Рис. 4 8

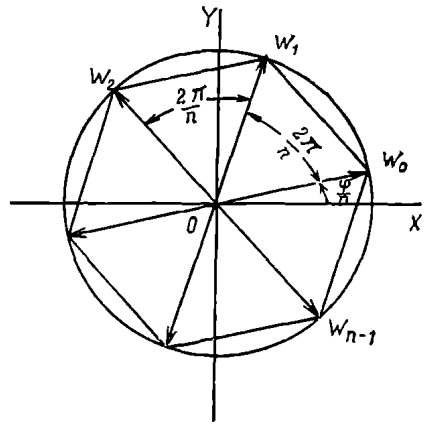


Рис. 4.9

Докажем, например, свойство 2°. В самом деле,

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{1} =$$

$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$$

$$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Так как $|e^{i\varphi}| = 1$, то комплексное число $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, располагается на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. В частности, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{\pi i} = -1$; $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$; $e^{2\pi i} = 1$ (рис. 4.8).

Из формул (4.12) и (4.13) получаем, что любое комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \tag{4.17}$$

где $r = |z|$; $\varphi = \arg z$.

С помощью формулы (4.17) легко получаем правила умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме:

$$\begin{aligned} &z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\\ &\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\\ &z^n = r^ne^{in\varphi}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Извлечение корня. По определению, корнем n-й степени из комплексного числа z является число w, такое, что $w^n = z$. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда $\rho = \sqrt[n]{r} \geqslant 0$. Далее $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е. $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $k \in \mathbf{Z}$.

Таким образом,

$$w_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Покажем, что различные значения w_k получаются при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. В самом деле, если k и k' — два значения, отличающиеся друг от друга на n или на любое кратное числа n, т. е. $k' - k = pn$, $p \in \mathbf{Z}$, то

$$\frac{\varphi+2k'\pi}{n} - \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{2pn\pi}{n} = 2p\pi,$$

а значит,

$$\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \cos\frac{\varphi+2k\pi}{n};\quad \sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Итак, n различных значений корня $\sqrt[n]{z}$ получаются по формуле

$$w_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{4.19}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi = \arg z$, $r = |z|$.

Из формулы (4.19) следует, что $|w_k| = \sqrt[n]{r}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. все n значений корня $\sqrt[n]{r}$ располагаются на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат, деля эту окружность на n равных частей, причем $\arg w_0 = \frac{\varphi}{n}$, а аргументы двух соседних значений $\sqrt[n]{z}$ отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$ (рис. 4.9).

Пример 3. Найти все значения $\sqrt[4]{1}$.

□ Так как $\varphi = \arg 1 = 0, |1| = 1$, то по формуле (4.19) получаем

$$w_1 = e^{i0} = 1;\ w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i;\ w_3 = e^{i\pi} = -1;\ w_4 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i.$$ ■

Некоторые свойства комплексно-сопряженных чисел. Пусть $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ — два комплексно-сопряженных числа. Из рис. 4.5 следует, что $\varphi = \arg z$; $-\varphi = \arg \bar{z}$.

Отметим следующие свойства комплексно-сопряженных выражений:

1°. $\bar{z} = z$, если $z = a$ — действительное число.

2°. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

3°. $\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$, $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbf{Z}$; $z \neq 0$, $n < 0$,

т. е. операция сопряжения перестановочна с арифметическими опе-

рациями над комплексными числами. Проверим, например, третье равенство. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

Комплексные функции действительного переменного. Часто приходится рассматривать такие функции, у которых независимая переменная действительна, но сама функция принимает комплексные значения.

В общем случае *комплекснозначной* функцией действительного переменного называется функция вида

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in \mathrm{T}, \tag{4.20}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — действительные функции переменного t:

$$(x(t) = \mathrm{Re}\, z(t), \quad y(t) = \mathrm{Im}\, z(t)).$$

Поскольку функцию (4.20) можно истолковывать как вектор-функцию с координатами $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то задание функции (4.20) равносильно заданию вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. В результате теория комплекснозначных функций действительного переменного не отличается существенно от теории вектор-функций. В частности, для непрерывности $z(t)$ необходимо и достаточно, чтобы ее действительная часть $x(t)$ и мнимая часть $y(t)$ были непрерывными, а дифференцируемость комплекснозначной функции (4.20) равносильна дифференцируемости ее действительной и мнимой частей, считая i постоянной, т. е.

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Для примера рассмотрим функцию $z(t) = Ae^{i(\omega t+\alpha)}$, часто применяемую для исследования гармонических колебаний. Используя формулу Эйлера, перепишем ее в виде

$$z(t) = A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha).$$

Отсюда

$$z'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) + iA\omega\cos(\omega t + \alpha) = A\omega\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ iA\omega\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = A\omega e^{i\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = A\omega e^{i(\omega t+\alpha)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= iA\omega e^{i(\omega t+\alpha)} = i\omega z(t).$$

Этот же результат можно получить, если продифференцировать функцию $Ae^{i(\omega t+\alpha)}$ как сложную показательную функцию.

Как и вектор-функции, комплекснозначные функции (4.20) на плоскости XY определяют кривую $x = x(t)$, $y = y(t)$, заданную параметрически.

Пример 4. Определить вид кривой $z(t) = -\sec t + i3 \operatorname{tg} t$.

□ Так как $x = -\sec t$; $y = 3 \operatorname{tg} t$, то отсюда

$$x^2 - \frac{y^2}{9} = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1,$$

т. е. искомая комплекснозначная функция на плоскости XY определяет гиперболу $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. ■

Задачи и упражнения

1. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число:

а) $-1 + i\sqrt{3}$; б) $-1 - i$; в) $1 - \cos\alpha + i \sin\alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$.

2. Где расположены точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости, если $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$; $c \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant d$?

3. Решить уравнение $z^6 + 64 = 0$.

4. Вычертить область:

а) $|z - 1 - i| < 1$, $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}$; б) $1 < |z - 1| \leqslant 2$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z < 1$.

5. Определить вид кривой:

а) $z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}$; б) $z = \frac{t - 1 + it}{t(t - 1)}$.

4.3. МНОГОЧЛЕНЫ

Многочлены в комплексной области. Теорема Безу*. Функция вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \qquad (4.21)$$

называется *многочленом n-й степени* переменного z, в общем случае комплексного. Постоянные числа a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, называются *коэффициентами многочлена*, причем $a_0 \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что многочлен (4.21) имеет действительные коэффициенты.

Число z_0 называется *нулем* или *корнем* многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z_0) = 0$. Покажем, что если z_0 — корень многочлена с действительными коэффициентами, то и сопряженное ему число $\bar{z}_0$ тоже является корнем этого многочлена. В самом деле, используя свойства комплексно-сопряженных чисел, получим

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} = \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_n} =$$
$$= \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_n = P_n(\bar{z}).$$

Отсюда, если $P_n(z_0) = 0$, то $P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)} = 0$, т. е. $\bar{z}_0$ — корень многочлена $P_n(z)$.

* Э. Безу (1730 — 1783) — французский математик.

Из алгебры известно, что если степень n многочлена $P_n(z)$ больше степени m многочлена $Q_m(z)$, то многочлен $P_n(z)$ можно разделить, вообще говоря, с остатком, на $Q_m(z)$, при этом степень остатка меньше m, т. е. справедливо равенство

$$P_n(z) = Q_m(z)S_k(z) + R_l(z), \tag{4.22}$$

в котором $P_n(z)$ называется *делимым*, $Q_m(z)$ — *делителем*, многочлен k-й степени $S_k(z)$ — *частным* от деления $P_n(z)$ на $Q_m(z)$, а многочлен l-й степени $R_l(z)$ — *остатком* от этого деления, при этом $l < m$. На практике такое деление осуществляется «уголком», как и деление целых чисел.

Пример 1. Разделить многочлен $P_5(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ на многочлен $Q_2(x) = x^2 - 3x + 2$.

□ Поступая, как и при делении целых чисел, получаем

$$\begin{array}{r|l}
3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 - 3x + 2 \\
\underline{3x^5 - 9x^4 + 6x^3} & \hline
9x^4 - 10x^3 + 2x^2 - x + 1 & 3x^3 + 9x^2 + 17x + 35 \\
\underline{9x^4 - 27x^3 + 18x^2} & \\
17x^3 - 16x^2 - x + 1 & \\
\underline{17x^3 - 51x^2 + 34x} & \\
35x^2 - 35x + 1 & \\
\underline{35x^2 - 105x + 70} & \\
70x - 69 &
\end{array}.$$

Таким образом, частное $S_3(x) = 3x^3 + 9x^2 + 17x + 35$, остаток — $R_1(x) = 70x - 69$, так что

$$3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^2 - 3x + 2)(3x^3 + 9x^2 + 17x + 35) + 70x - 69. \blacksquare$$

Теорема 4.1 (Безу). Число z_0 является корнем многочлена $R_n(z)$ тогда и только тогда, когда $R_n(z)$ делится без остатка на $z - z_0$, т. е. если

$$P_n(z) = (z - z_0)S_{n-1}(z). \tag{4.23}$$

□ *Необходимость.* Пусть z_0 — корень многочлена $P_n(z)$. Согласно равенству (4.22), имеем $P_n(z) = (z - z_0)S_{n-1}(z) + R$, где R — константа. Учитывая, что $P_n(z_0) = 0$, получим $R = 0$, откуда и следует равенство (4.23).

Достаточность вытекает из равенства (4.23) при $z = z_0$. ■

Разложение многочлена на множители. Число z_0 называется *корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k*, если $P_n(z)$ можно представить в виде $P_n(z) = (z - z_0)^k S_{n-k}(z)$, $S_{n-k}(z_0) \neq 0$, т. е. если $P_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$ и не делится на $(z - z_0)^{k+1}$. Число k называется *кратностью корня*.

Если в свою очередь число z_1 является корнем многочлена $S_{n-k}(z)$ кратности k_1, то $S_{n-k}(z) = (z - z_1)^{k_1} S_{n-k-k_1}(z)$, где $S_{n-k-k_1}(z_1) \neq 0$. Продолжая этот процесс дальше, через конечное число шагов m получим многочлен нулевой степени $S_{n-k-k_1-\ldots-m-1} = A$, причем, очевидно, $A = a_0$.

Таким образом, если $z_0, z_1, \ldots, z_m$ — корни многочлена $P_n(z)$

кратности k_0, k_1, ..., k_m соответственно, то имеет место следующее разложение многочлена $P_n(z)$ на множители

$$P_n(z) = a_0(z - z_0)^{k_0}(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}, \qquad (4.24)$$

причем $k_0 + k_1 + \dots + k_m = n$.

Строгое обоснование формулы (4.24) вытекает из *основной теоремы алгебры*, утверждающей, что всякий многочлен n-й степени имеет по крайней мере один комплексный корень.

Пример 2. Разложить многочлен $P_3(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 4$ на множители.

□ Нетрудно проверить, что $z = 1$ является корнем данного многочлена. Тогда по теореме Безу он делится без остатка на $z - 1$. Имеем

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 5z^2 + 8z - 4 & z - 1 \\ \underline{-\,(z^3 - z^2)} & \\ -4z^2 + 8z - 4 & z^2 - 4z + 4 \\ \underline{-\,(-4z^2 + 4z)} & \\ -4z - 4 & \\ \underline{-\,(-4z - 4)} & \\ 0 & \end{array},$$

т. е. $z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = (z - 1)(z^2 - 4z + 4) = (z - 1)(z - 2)^2$.

Таким образом, искомый многочлен имеет два корня: $z_1 = 1$ кратности 1 и $z_2 = 2$ кратности 2. ■

Пусть z_0 — корень многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами, тогда число $\bar{z}_0$ — тоже корень $P_n(z)$. Следовательно, в разложении многочлена на множители будет присутствовать произведение $(z - z_0) \cdot (z - \bar{z}_0)$. Отсюда следует, что если z_0 — корень кратности k, то и $\bar{z}_0$ — корень кратности k. Другими словами, многочлен $P_n(z)$ в этом случае можно представить в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^k (z - \bar{z}_0)^k S_{n-2k}(z). \qquad (4.25)$$

Если $z_0 = a + bi$, то $\bar{z}_0 = a - bi$ и, значит, $(z - z_0) \cdot (z - \bar{z}_0) = [(z - a) - bi] \cdot [(z - a) + bi] = z^2 + pz + q$, где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ — действительные числа. Легко видеть, что трехчлен $z^2 + pz + q$ имеет дискриминант $D = \frac{p^2}{4} - q = -b^2 < 0$.

Таким образом, если z_0 — комплексный корень трехчлена $z^2 + pz + q$, то дискриминант $D < 0$. Справедливо и обратное: если $D < 0$, то трехчлен имеет комплексно-сопряженные корни: $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{-D}$.

Из сказанного следует, что если z_0 и $\bar{z}_0$ — комплексно-сопряженные корни многочлена $P_n(z)$ кратности k, то в силу представления (4.25) имеет место разложение

$$P_n(z) = (z^2 + pz + q)^k S_{n-2k}(z).$$

Подводя итог вышеизложенному, получаем следующий вывод:

для всякого многочлена $P_n(x)$ степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение на множители вида

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\times \\ \times(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \qquad (4.26)$$

причем $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(l_1+l_2+\ldots+l_s)=n$, $\frac{p_i^2}{4}-q_i<0$, $i=1, 2, \ldots, s$, и все числа a_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_r, p_1, q_1, p_2, q_2, $\ldots$, p_s, q_s действительны. Заметим, что мы перешли здесь от обозначения переменной z к x, подчеркивая тем самым, что все дальнейшие рассмотрения будут проводиться в области действительных чисел.

Условие тождественности двух многочленов. Выясним условие, при выполнении которого два многочлена тождественны.

Так как многочлен n-й степени $P_n(x)$ не может иметь более чем n корней с учетом их кратности, то если он обращается в нуль при $n+1$ различных значениях x_0, x_1, $\ldots$, x_n, то этот многочлен тождественно равен нулю. В самом деле, из разложения $P_n(x)=a_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ и того, что $P_n(x_0)=0$, $x_0\neq x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, следует, что $a_0=0$, т. е. $P_n(x)=0$, $\forall x$. Получаем, что многочлен $P_n(x)$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Отсюда следует, что *два многочлена $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ тождественно равны друг другу тогда и только тогда, когда у них совпадают коэффициенты при одинаковых степенях x.*

Признак кратности корня. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. Если $x=x_0$ — корень кратности k многочлена $P_n(x)$, то x_0 является корнем кратности $k-1$ его производной $P_n'(x)$.

□ Пусть x_0 — корень кратности k многочлена $P_n(x)$. Тогда имеет место представление

$$P_n(x)=(x-x_0)^k S_{n-k}(x),\ S_{n-k}(x_0)\neq 0. \qquad (4.27)$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$P_n'(x)=k(x-x_0)^{k-1}S_{n-k}(x)+(x-x_0)^kS_{n-k}'(x)=(x-x_0)^{k-1}P_{n-k}(x),$$

где $P_{n-k}(x)=kS_{n-k}(x)+(x-x_0)S_{n-k}'(x)$; $P_{n-k}(x_0)=kS_{n-k}(x_0)\neq 0$, т. е. x_0 является корнем кратности $k-1$ производной $P_n'(x)$. ■

Следствие (признак кратности корня многочлена). Для того чтобы число $x=x_0$ было корнем кратности k, $k\leqslant n$, многочлена $P_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$P_n(x_0)=P_n'(x_0)=P_n''(x_0)=\ldots=P_n^{k-1}(x_0)=0,\ P_n^{(k)}(x_0)\neq 0. \qquad (4.28)$$

□ *Необходимость.* Пусть x_0 — корень кратности k многочлена $P_n(x)$. Тогда в силу теоремы 4.2 число x_0 является корнем кратности $k-1$ производной $P_n'(x)$, т. е. $P_n'(x_0)=0$. Аналогично x_0 является корнем кратности $k-2$ многочлена $P_n''(x)$, т. е. $P_n''(x_0)=0$. Таким образом, по индукции получаем, что x_0 — простой корень многочлена $P_n^{(k-1)}(x)$, т. е. $P_n^{(k-1)}(x)=(x-x_0)R_{n-k}(x)$; $R_{n-k}(x_0)\neq 0$.

Дифференцируя это равенство, находим $P_n^{(k)}(x) = R_{n-k}(x) + (x - x_0) R'_{n-k}(x)$, откуда следует, что $P_n^{(k)}(x_0) = R_{n-k}(x_0) \neq 0$. Соотношения (4.27) доказаны.

Достаточность. Пусть соотношения (4.28) имеют место. Разлагая $P_n(x)$ по формуле Тейлора, будем иметь

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} + \\ + \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

или, с учетом равенств (4.28),

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = (x - x_0)^k \left[\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{P_n^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0) + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-k} \right] = (x - x_0)^k S_{n-k}(x),$$

где многочлен в квадратных скобках обозначен через $S_{n-k}(x)$, причем $S_{n-k}(x_0) \neq 0$, т. е. представление (4.27) имеет место. ■

Пример 3. Определить кратность корня $x_0 = 1$ многочлена $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

□ Так как $P_4(1) = 0$; $P'_4(1) = (4x^3 - 6x^2 + 2)|_{x=1} = 0$; $P''_4(1) = (12x^2 - 12x)|_{x=1} = 0$; $P'''_4(1) = (24x - 12)|_{x=1} \neq 0$, то $x_0 = 1$ — корень кратности $z=3$. ■

Задачи и упражнения

1. Многочлен $P_4(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$ разделить с остатком на многочлен $Q_2(x) = x^2 - x + 1$.

2. Выделить целую часть дробно-рациональной функции $f(x) = \dfrac{5x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x + 2}{x^3 + 3x - 4}$.

3. Числа $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4 - i$, $x_4 = 2i$ являются корнями многочлена с действительными коэффициентами, причем x_4 — корень кратности 2. Разложить его на множители.

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Первообразная и неопределенный интеграл. В настоящей главе решается следующая задача: по известной производной $f'(x)$ требуется найти саму функцию $f(x)$. С механической точки зрения это означает восстановление закона прямолинейного движения материальной точки по известной скорости ее движения.

Введем следующее определение.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ на бесконечном промежутке и на отрезке $[a, b]$. В последнем случае под производной $F'(a)$ ($F'(b)$) понимается правая (левая) производная в точке a (b) (см. равенства (3.3), (3.4), ч. I).

Пример 1. Функция $F(x) = \cos(2x - 3)$ есть первообразная для функции $f(x) = -2\sin(2x - 3)$ на $(-\infty, +\infty)$, поскольку $F'(x) = (\cos(2x - 3))' = -2\sin(2x - 3)$.

Пример 2. Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x) = 1/x$, $\forall x \neq 0$, так как $(\ln|x|)' = 1/x$, $x \neq 0$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на (a, b), то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на интервале (a, b). Это следует из того, что $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Теорема 5.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$, $\forall x \in (a, b)$, где C — некоторая постоянная.

□ Обозначим $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. В силу дифференцируемости функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ на (a, b) функция $\Phi(x)$ также дифференцируема на (a, b) и $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Покажем теперь, что если $\Phi'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, то $\Phi(x)$ — постоянна на (a, b). Действительно, пусть x_0 — некоторая фиксированная точка из (a, b). Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ в силу теоремы Лагранжа справедливо равенство $\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Phi'(c)(x - x_0)$, где c — некоторая точка, находящаяся между x_0 и x. Так как $\Phi'(c) = 0$, то отсюда $\Phi(x) = \Phi(x_0) = C$, $\forall x \in (a, b)$, т. е. $F_1(x) - F_2(x) = C$, $\forall x \in (a, b)$. ■

Замечание. В процессе доказательства теоремы 5.1 установлен следующий важный факт: если функция имеет на интервале (a, b) производную, тождественно равную нулю, то она постоянна на (a, b).

Итак, если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a, b), то в силу теоремы 5.1 любая ее первообразная $\Phi(x)$ на этом интервале имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, при этом знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования.

Если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a, b), то в силу теоремы 5.1 и определения неопределенного интеграла верно равенство

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{5.1}$$

где C — некоторая постоянная, называемая постоянной интегрирования.

Таким образом, исходя из примеров 1 и 2, имеем

$$\int [-2\sin(2x-3)]\,dx = \cos(2x-3) + C; \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

Аналогично $\int 0\,dx = C$; $\int 1\,dx = \int dx = x + C$.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$. Отметим, что *для непрерывной на (a, b) функции первообразная (неопределенный интеграл) существует*. Этот факт будет доказан несколько позже (см. теорему 5.9).

Установим основные свойства неопределенного интеграла.

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на (a, b). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$1^\circ.\ d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

□ По определению дифференциала имеем

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'\,dx = f(x)\,dx. \ ■$$

$$2^\circ.\ \int dF(x) = F(x) + C. \tag{5.3}$$

□ Имеем $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$ согласно равенству (5.1). ■

Свойство 1° означает, что последовательно взятые знаки d и $\int$ взаимно «сокращаются», а свойство 2° означает, что знаки $\int$ и d тоже взаимно «сокращаются», но в этом случае к $F(x)$ добавляется произвольная постоянная.

3° (линейность неопределенного интеграла):

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx + C,\ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}. \tag{5.4}$$

□ В силу линейности операции дифференцирования имеем

$$\left(\alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx\right)' = \alpha\left(\int f(x)\,dx\right)' + \beta\left(\int g(x)\,dx\right)' = \\ = \alpha f(x) + \beta(g(x)).$$

Отсюда следует, что функция $\alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$ есть первообразная для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$. Но функция $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx$ также является первообразной для $\alpha f(x) + \beta g(x)$. А поскольку две первообразные для одной и той же функции отличаются на некоторую постоянную C, то отсюда следует справедливость равенства (5.4). ■

4°. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \tag{5.5}$$

□ Действительно,

$$\left(\frac{1}{a} F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax+b) = f(ax+b). \blacksquare$$

Таблица основных неопределенных интегралов. В § 3.1 настоящего пособия приведена таблица производных основных элементарных функций. Каждая формула этой таблицы вида $F'(x) = f(x)$ может быть записана теперь в виде формулы $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Таким образом, приходим к следующей *таблице основных неопределенных интегралов:*

1. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$
2. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C.$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$
9. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
10. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,\ x \neq 0.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C; \\ -\arccos x + C \end{cases} (-1 < x < 1).$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C; \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

15. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|,$ $a \neq 0.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0$ (в случае знака «минус» должно быть $|x| > |a|$).

Формулы 15—18 таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются непосредственным дифференцированием их правых частей. Для примера докажем формулу 15. Имеем

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2},$$

что равно подынтегральной функции в формуле 15.

Интегралы 1—18 называются *табличными*.

Если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается в элементарных функциях. Однако интеграл от элементарной функции может и не быть функцией элементарной. Так, например, известно, что интегралы $\int e^{-x^2} dx$, $\int \sin x^2\,dx$, $\int \cos x^2\,dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, хотя и существуют, но не выражаются в виде конечных комбинаций элементарных функций.

Доказанные свойства 1°—4° и таблица неопределенных интегралов дают возможность вычислить интегралы от более сложных элементарных функций.

Пример 3. $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^2 dx = \int \left(9x + \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}\right) dx = 9\int x\,dx +$ $+ 12 \int x^{-1/2} dx + 4 \int x^{-2} dx = \frac{9}{2} x^2 + 24\sqrt{x} - \frac{4}{x} + C.$

Пример 4. $\int \cos^2 (2x-1)\,dx = \int \frac{1+\cos(4x-2)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx +$ $+ \frac{1}{2} \int \cos(4x-2)\,dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin(4x-2) + C.$

Общего метода, позволяющего судить о том, выражается ли данный неопределенный интеграл через элементарные функции, не существует. Однако можно указать ряд приемов, дающих возможность выразить некоторые интегралы через элементарные функции, а так-

же классы функций, для которых задача нахождения первообразных всегда разрешима.

Интегрирование подстановкой (замена переменной). При вычислении неопределенных интегралов часто пользуются *методом подстановки* или *замены переменной*. Он сводится к формуле

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt + C, \tag{5.6}$$

где $f(t)$ — непрерывная функция, а $t = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем область значений функции $t = \varphi(x)$ принадлежит области определения функции $f(t)$.

Для доказательства формулы (5.6) продифференцируем обе ее части по x. Имеем

$$\left(\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx\right)'_x = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x);$$

$$\left(\int f(t)\,dt + C\right)'_x = \left(\int f(t)\,dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = f(t)\Big|_{t=\varphi(x)} t'_x = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Сравнение правых частей этих равенств доказывает формулу (5.6).

Формуле (5.6) можно придать вид

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x) = \int f(t)\,dt\,|_{t=\varphi(x)} + C. \tag{5.7}$$

Отсюда следует, что для вычисления интеграла $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$ нужно «подвести» $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, получив при этом $d\varphi(x)$, и осуществить подстановку $\varphi(x) = t$.

Пример 5. Вычислить $\int \cos^5 x \sin x\,dx$.

□ В силу равенства (5.7) $\int \cos^5 x \sin x\,dx = -\int \cos^5 x\,d\cos x = |\cos x = t|^* = -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6}\Big|_{t=\cos x} + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$. ■

Пример 6. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int \ln^2 x\,d\ln x = |\ln x = t| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

Пример 7. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a)}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + C$

Поменяв в формуле (5.6) переменную интегрирования x на t, а t на x, получим

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt + C, \tag{5.8}$$

где $x = \varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая, что существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Формула (5.8) лежит в основе *метода замены переменной* в неопределенном интеграле. Вычислить интеграл в правой части равенства (5.8) иногда бывает проще, чем вычислить интеграл в левой его части.

---

* Здесь и далее выражения, ограниченные прямыми вертикальными линиями, означают выполнение промежуточных действий (в данном случае осуществляется замена $\cos x = t$).

Таким образом, для вычисления интеграла $\int f(x)\,dx$ нужно ввести замену $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, вычислить интеграл $\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ и в окончательном результате вернуться к исходной переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$.

Пример 8. Вычислить $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

□ Положим $x=a\sin t$, тогда $dx=a\cos t dt$. Таким образом,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt=$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

Но $t=\arcsin\frac{x}{a}$, поэтому $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\times\right.$

$\left.\times\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$ ■

Пример 9. Вычислить $I=\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

□ Положим $x=t^6$; $dx=6t^5dt$; $\sqrt{x}=t^3$; $\sqrt[3]{x}=t^2$. Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\int\frac{t^3 6t^5 dt}{t^2+1}=6\int\frac{t^8 dt}{t^2+1}.$$

Выделив под интегралом целую часть, получим

$$I=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)+C.$$

Поскольку $t=\sqrt[6]{x}$, то окончательно

$$I=6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C.$$ ■

Для интеграла $\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$ очевидна подстановка $f(x)=t$. В этом случае

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

Пример 10. $\int\operatorname{ctg}x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=|\sin x=t|=\int\frac{dt}{t}=$

$=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C.$

Аналогично

$$\int\operatorname{tg}x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

Пример 11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} =$

$$\int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Интегрирование по частям. Другим эффективным методом интегрирования является *метод интегрирования по частям*. Суть состоит в следующем.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на котором интервале функции. Тогда имеет место формула

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

ı, что равносильно,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.9}$$

Соотношение (5.9) называется *формулой интегрирования по тям*. Для ее доказательства найдем дифференциал $d(uv) = v\,du + u\,dv$, откуда $\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$. Учитывая равенство (5.3), по-ıаем $uv + C = \int v\,du + \int u\,dv$ или $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (постоянная этнесена к интегралу $\int v\,du$). Формула (5.9) доказана.

Формулой (5.9) целесообразно пользоваться тогда, когда подынтегральное выражение можно разбить на два множителя u и dv так, бы интегрирование выражений dv и $v\,du$ являлось задачей более ıстой, чем интегрирование исходного выражения $u\,dv$.

Пример 12. Вычислить $I = \int x\sin x\,dx$.

□ Положим $u = x$; $dv = \sin x\,dx = -d\cos x$. Тогда $du = dx$; $v = -\int d\cos x = -\cos x$. По формуле (5.9) имеем

$$I = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C. \blacksquare$$

Пример 13. $\int \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx;\ v = x \end{matrix}\right| = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

В отдельных случаях интегралы вычисляются неоднократным ıменением формулы (5.9).

Пример 14. $\int (ax^2 + bx + c)\cos\alpha\,x\,dx = \left|\begin{matrix} u = ax^2+bx+c;\ du = (2ax+b)dx \\ dv = \cos\alpha x\,dx;\ v = \dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha x \end{matrix}\right| =$

$$\frac{ıx^2 + bx + c}{\alpha}\sin\alpha x - \frac{1}{\alpha}\int (2ax+b)\sin\alpha\,x\,dx = \left|\begin{matrix} u = 2ax + b;\ du = 2a\,dx \\ dv = \sin\alpha x\,dx;\ v = -\dfrac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{ax^2+bx+c}{\alpha}\sin\alpha x+\frac{2ax+b}{\alpha^2}\cos\alpha x-\frac{2a}{\alpha^2}\int\cos\alpha x dx=\frac{ax^2+bx+c}{\alpha}\sin\alpha x+$$
$$+\frac{2ax+b}{\alpha^2}\cos\alpha x-\frac{2a}{\alpha^3}\sin\alpha x+C.$$

Интегрирование по частям иногда приводит к интегралу, совпадающему с исходным или сводящемуся к нему. В этом случае интеграл находится из получающегося относительно исходного интеграла уравнения.

Пример 15. Вычислить $I=\int e^{ax}\cos bx dx$.

$$\square\ I=\int e^{ax}\cos bx dx=\left|\begin{array}{l}u=e^{ax};\ du=ae^{ax}dx\\ dv=\cos bx dx;\ v=\dfrac{1}{b}\sin bx\end{array}\right|=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\times$$
$$\times\int e^{ax}\sin bx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=e^{ax};\ du=ae^{ax}dx\\ dv=\sin bx dx;\ v=-\dfrac{1}{b}\cos bx\end{array}\right|=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{a}{b^2}\ e^{ax}\cdot\times$$
$$\times\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$I=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{b^2}\ e^{ax}-\frac{a^2}{b^2}I,$$

откуда

$$I=\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}\ e^{ax}+C.\ \blacksquare$$

Замечание. Для вычисления интегралов, содержащих в качестве множителя в подынтегральном выражении одну из следующих функций $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsin}^2 x$, $\arccos^2 x$, ..., по формуле (5.9) следует принимать $u(x)$ одну из этих функций.

В интегралах вида $\int P_n(x)(a\cos\alpha x+b\sin\beta x)dx$ или вида $\int P_n(x)\,e^{ax}dx$ в качестве $u(x)$ выбираем $P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени от x.

Пример 16. Вычислить $I=\int\cos(\ln x)\,dx$.

$$\square\ I=\int\cos\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\cos\ln x;\ du=-\dfrac{\sin\ln x}{x}dx\\ dv=dx;\qquad v=x\end{array}\right|=x\cos\ln x+$$
$$+\int\sin\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\sin\ln x;\ du=\dfrac{\cos\ln x}{x}dx\\ dv=dx;\qquad v=x\end{array}\right|=x\cos\ln x+x\sin\ln x-I.$$

Отсюда

$$I=\int\cos\ln x dx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.\ \blacksquare$$

Задачи и упражнения

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{\arcsin^2 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; в) $\int\frac{x^3dx}{x^2+4}$; г) $\int\frac{\sin\ln x}{x}dx$;

д) $\int\frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}dx$; е) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ (подстановка $x=2/t$); ж) $\int e^{ax}\sin bx dx$;

$\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; и) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; к) $\int \frac{\ln \ln x}{x}dx$.

'. Применив формулу (5.9) интегрирования по частям к функциям $u = e^x$; $-x$, получим $-\int dx = 1 - \int dx$ или $0 = 1$. Где ошибка?

.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выража- в элементарных функциях, образуют *рациональные функции*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \tag{5.10}$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0);$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \quad (b_0 \neq 0) —$$

очлены степеней n и m соответственно.

Рациональные функции называются *рациональными дробями*. и $n < m$, то дробь (5.10) называется правильной, в противном ае — неправильной. Каждая неправильная дробь в соответствии венством (4.22) может быть представлена в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}, \tag{5.11}$$

$S_k(x)$ — целая часть дроби P_n/Q_m, а $R_l(x)$ — остаток этой дро- ($R_l(x)$ — многочлен степени $l < m$).

Пример 1. Для функции $R(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 6x - 7}{x^2 - 4}$ делением числителя на знатель получим

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 6x - 7}{x^2 - 4} = 5x - 3 + \frac{26x - 19}{x^2 - 4}.$$

Согласно соотношению (5.11), интегрирование неправильной ра- циональной дроби сводится к интегрированию многочлена $S_k(x)$, что представляет труда, и правильной рациональной дроби $R_l(x)/$ $x)$.

Будем считать, что дробь $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная. Среди вильных дробей различают четыре типа так называемых *простей- дробей:*

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geqslant 2);$$
$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \geqslant 2),$$

A, M, N, a, p, q — постоянные; k — целое положительное число; криминант $D = p^2 - 4q < 0$.

Покажем сначала, как интегрируются простейшие дроби.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Для интегрирования дробей типа III и IV преобразуем трехчлен x^2+px+q к виду

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Полагая теперь $x+\frac{p}{2} = t$; $q-\frac{p^2}{4} = a^2 > 0$, получаем:

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)+N-\frac{Mp}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2}\times$$

$$\times \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$

$$\times \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

IV. $$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{2}\right)\right]^k}\,dx =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Вычислим полученные интегралы по отдельности. Имеем

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Обозначим $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ и проинтегрируем его по частям:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left|\begin{matrix} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^k}; & du = -\frac{2kt\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} \\ dv = dt; & v = t \end{matrix}\right| = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} +$$

$$+ 2k\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} +$$

$$+ 2k\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} - 2ka^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1},$$ т. е.

$$I_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1}.$$

Отсюда получаем следующую рекуррентную формулу

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, зная интеграл $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$, по рекуррентной формуле можно найти интеграл $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$ и т. д.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби. Оказывается, что любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей типа I—IV.

Пусть дана правильная дробь $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n < m$. Если $x = a$— действительный корень кратности k многочлена $Q_m(x)$ с действительными коэффициентами, то $Q_m(x) = (x-a)^k Q_{m-k}(x)$, где Q_{m-k} — многочлен степени $m-k$ и $Q_{m-k}(a) \neq 0$. Если же $x = \alpha + i\beta$ — комплексный корень кратности k многочлена $Q_m(x)$, то имеет место представление $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x)$, где $Q_{m-2k}(x)$ — многочлен степени $m-2k$, причем $Q_{m-2k}(\alpha \pm i\beta) \neq 0$, $p = -2\alpha$; $q = \alpha^2 + \beta^2$; $p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0$ (см. § 4.3).

Справедлива следующая

Теорема 5.2. Если $x = a$ — действительный корень кратности k многочлена $Q_m(x)$, т. е. $Q_m(x) = (x-a)^k Q_{m-k}(x)$; $Q_{m-k}(a) \neq 0$, то для функции $P_n(x)/Q_m(x)$ имеет место разложение

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^k Q_{m-k}(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^k} + \frac{M(x)}{(x-a)^{k-1} Q_{m-k}(x)}, \tag{5.12}$$

где A_0 — действительное постоянное число; $M(x)$ — некоторый многочлен с действительными коэффициентами, а дробь $M(x)/[(x-a)^{k-1} \times Q_{m-k}(x)]$ — правильная.

□ Прибавим и вычтем из дроби $P_n(x)/[(x-a)^k Q_{m-k}(x)]$ выражение $A_0/(x-a)^k$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^k} + \left[\frac{P_n(x)}{(x-a)^k Q_{m-k}(x)} - \frac{A_0}{(x-a)^k}\right] = \frac{A_0}{(x-a)^k} + \frac{P_n(x) - A_0 Q_{m-k}(x)}{(x-a)^k Q_{m-k}(x)}. \tag{5.13}$$

Так как $n < m$ и $m-k < m$, то при любом выборе постоянной A_0 дробь $\frac{P_n(x) - A_0 Q_{m-k}(x)}{(x-a)^k Q_{m-k}(x)}$ является правильной. Постоянную A_0 выберем так, чтобы число $x = a$ было корнем многочлена $P_n(x) - A_0 Q_{m-k}(x)$ и, значит, чтобы этот многочлен делился на $x-a$, т. е. определим A_0 из условия

$$(P_n(a) - A_0 Q_{m-k}(a) = 0) \Rightarrow (A_0 = P_n(a)/Q_{m-k}(a))$$

(отметим, что $Q_{m-k}(a) \neq 0$). При таком выборе A_0 второе слагаемое в правой части равенства (5.13) можно сократить на $x-a$, в результате чего получим дробь вида $M(x)/[(x-a)^{k-1} Q_{m-k}(x)]$, которая, очевидно, тоже является правильной. ■

Следствие. Если $x=a$ — корень кратности k многочлена $Q_m(x)$, то имеет место формула

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^k Q_{m-k}(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\\+\frac{N(x)}{Q_{m-k}(x)}, \qquad (5.14)$$

где $\dfrac{N(x)}{Q_{m-k}(x)}$ — правильная дробь; A_i, $i=0, 1, \ldots, k-1$, — постоянные числа.

Для доказательства формулы (5.14) достаточно применить $(k-1)$ раз теорему 5.2 к слагаемому $M(x)/[(x-a)^{k-1}Q_{m-k}(x)]$ в правой части равенства (5.12).

Теорема 5.3. Если знаменатель $Q_m(x)$ правильной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ имеет вид $Q_m(x)=(x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x)$, $p^2-4q<0$, где p и q — действительные числа, то справедливо равенство

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x)}=\frac{B_0x+C_0}{(x^2+px+q)^k}+\\+\frac{D(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_{m-2k}(x)},$$

где B_0, C_0 — действительные числа, а $D(x)/[(x^2+px+q)^{k-1}\times Q_{m-2k}(x)]$ — правильная дробь.

Следствие. Если $Q_m(x)=(x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x)$, $p^2-4q<0$, то имеет место равенство

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x)}=\frac{B_0x+C_0}{(x^2+px+q)^k}+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\\+\ldots+\frac{B_{k-1}x+C_{k-1}}{x^2+px+q}+\frac{E(x)}{Q_{m-2k}(x)}, \qquad (5.15)$$

где $E(x)/Q_{m-2k}(x)$ — правильная дробь, B_i, C_i — постоянные числа, $i=0, 1, \ldots, k-1$.

Доказательство теоремы 5.3 и ее следствия проводится аналогично доказательству теоремы 5.2 и ее следствия.

Пусть теперь многочлен $Q_m(x)$ имеет представление $Q_m(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$, т. е. числа $a_1, a_2, \ldots, a_r$ являются корнями кратности $k_1, k_2, \ldots, k_r$ соответственно для многочлена $Q_m(x)$, а $l_1, l_2, \ldots, l_s$ — кратности его комплексно-сопряженных корней $\alpha_1\pm i\beta_1$, $\alpha_2\pm i\beta_2, \ldots, \alpha_s\pm i\beta_s$ соответственно $(p_j^2-4q_j<0, j=1, 2, \ldots, s)$. Тогда на основании теорем 5.2 и 5.3 справедливо равенство

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{10}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1(k_1-1)}}{x-a_1}+\\+\frac{A_{20}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{A_{2(k_2-1)}}{x-a_2}+\\+\ldots+\frac{A_{r0}}{(x-a_r)^{k_r}}+\frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{k_r-1}}+\ldots+\frac{A_{r(k_r-1)}}{x-a_r}+$$

$$\frac{B_{10}x+C_{10}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1(l_1-1)}x+C_{1(l_1-1)}}{x^2+p_1x+q_1}+$$
$$\frac{B_{20}x+C_{20}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}}+\ldots+\frac{B_{2(l_2-1)}x+C_{2(l_2-1)}}{x^2+p_2x+q_2}+$$
$$+\ldots+\frac{B_{s0}x+C_{s0}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_{s(l_s-1)}x+C_{s(l_s-1)}}{x^2+p_sx+q_s}, \qquad (5.16)$$

ıе A_{10}, A_{11}, ..., $A_{r(k_r-1)}$, B_{10}, B_{11}, ..., $B_{s(l_s-1)}$, C_{10}, C_{11}, ..., $C_{s(l_s-1)}$ — экоторые постоянные числа, называемые *коэффициентами разложения* дроби на простейшие.

Проиллюстрируем формулу (5.16) конкретными примерами, не ıходя самих коэффициентов разложения.

Пример 2. $\dfrac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{A_0}{(x-1)^2}+\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{B_0}{x+2}$.

Пример 3. $\dfrac{x^6-2x^3+1}{x^3(x+1)(x^2+1)^2}=\dfrac{A_0}{x^3}+\dfrac{A_1}{x^2}+\dfrac{A_2}{x}+\dfrac{B_0}{x+1}+\dfrac{C_0x+D_0}{(x^2+1)^2}+\dfrac{C_1x+D_1}{x^2+1}$.

Итак, всякая рациональная функция представляется в виде сум- ы многочлена и некоторой правильной рациональной дроби, которую свою очередь можно записать в виде суммы конечного числа про- ейших дробей типа I—IV по формуле (5.16). Поскольку интегралы простейших дробей — элементарные функции, то отсюда вытекает ıедующий важный вывод: *интеграл от любой рациональной фун- ции выражается через элементарные функции.*

Методы нахождения коэффициентов разложения рациональной функции на ıостейшие дроби. 1. Метод неопределенных коэффициентов. Суть этого метода ıзъясним на примерах.

Пример 4. Функцию $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}$ разложить на простейшие дроби.

□ Так как $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$, то $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}$ согласно формуле (5.16),

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},$$

е числа A, B, C пока неизвестны. Правую часть приведем к общему знамена- лю, в результате чего получим соотношение

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Отбрасывая теперь знаменатель, получаем равенство

$$2x^2-x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

или

$$2x^2 - x + 3 = (A + B + C)\,x^2 + (A + 2B - C)\,x - 2A.$$

Поскольку два многочлена тождественно равны только в том случае, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x, то из этого равенства получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B + C = 2; \\ x^1 & A + 2B - C = -1; \\ x^0 & -2A = 3. \end{array}$$

Решая ее, находим, что $A = -\frac{3}{2}$; $B = \frac{4}{3}$; $C = \frac{13}{6}$, т. е.

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x\,(x-1)\,(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{4}{3\,(x-1)} + \frac{13}{6\,(x+2)}. \blacksquare$$

Пример 5. Разложить на простейшие дроби функцию $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4\,(x+1)^2}$.

□ В этом примере сомножитель x^4 в знаменателе порождает четыре слагаемых $\frac{A}{x^4}$, $\frac{B}{x^3}$, $\frac{C}{x^2}$, $\frac{D}{x}$, а сомножителю $(x+1)^2$ будут соответствовать дроби $\frac{E}{(x+1)^2}$ и $\frac{F}{x+1}$. Таким образом,

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4\,(x+1)^2} = \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1},$$

где коэффициенты A, B, C, D, E и F подлежат определению.

Приведя в правой части слагаемые к общему знаменателю, получим

$$\frac{A\,(x+1)^2 + Bx\,(x+1)^2 + Cx^2\,(x+1)^2 + Dx^3\,(x+1)^2 + Ex^4 + Fx^4\,(x+1)}{x^4\,(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(D+F)\,x^5 + (C + 2D + E + F)x^4 + (B + 2C + D)x^3 + (A + 2B + C)x^2 + (2A + B)x + A}{x^4\,(x+1)^2}$$

Числитель этого выражения равен $x^4 + x^2 + 2x + 1$. Отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^5 & D + F = 0, \\ x^4 & C + 2D + E + F = 1, \\ x^3 & B + 2C + D = 0, \\ x^2 & A + 2B + C = 1, \\ x^1 & 2A + B = 2, \\ x^0 & A = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 0, \\ E = 1, \\ F = 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, $\dfrac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4\,(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$. $\blacksquare$

Пример 6. Разложить на простейшие дроби функцию $f(x) = \dfrac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4}{(x^4 - 1)\,(x^2 + 1)}$.

□ Поскольку $x^4 - 1 = (x^2 - 1)\,(x^2 + 1) = (x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1)$, то

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4}{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2+1} + \frac{Ex + F}{(x^2+1)^2}.$$

Слагаемые справа приведем к общему знаменателю, получим выражение

$$\frac{A\,(x+1)\,(x^2+1)^2 + B\,(x-1)\,(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x^2-1)(x^2+1) + (Ex+F)(x^2-1)}{(x^4-1)\,(x^2+1)} =$$

$$\frac{(A+B+C)\,x^5+(A-B+D)\,x^4+(2A+2B+E)\,x^3+(2A-2B+F)\,x^2+}{(x^4-1)\,(x^2+1)}$$
$$=\frac{+(A+B-C-E)\,x+A-B-D-F}{(x^4-1)\,(x^2+1)}.$$

Числитель этого выражения равен $3x^4-2x^3+5x^2-2x+4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему

$$\left.\begin{array}{r|l} x^5 & A+B+C=0,\\ x^4 & A-B+D=3,\\ x^3 & 2A+2B+E=-2,\\ x^2 & 2A-2B+F=5,\\ x^1 & A+B-C-E=-2,\\ x^0 & A-B-D-F=4. \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A=1,\\ B=-2,\\ C=1,\\ D=0,\\ E=0,\\ F=-1. \end{array}\right.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{3x^4-2x^3+5x^2-2x+4}{(x^4-1)\,(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}.\ \blacksquare$$

2. **Способ домножения.** Пусть a — действительный корень кратности k многочлена $Q_m(x)$. Тогда имеет место разложение (5.14):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^kQ_{m-k}(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\ \dots\ +\frac{A_{k-2}}{(x-a)^2}+$$
$$+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{N(x)}{Q_{m-k}(x)}.$$

Умножив обе части этого равенства на $(x-a)^k$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ \dots\ +A_{k-1}(x-a)^{k-1}+$$
$$+\frac{N(x)\,(x-a)^k}{Q_{m-k}(x)}. \qquad (5.17)$$

Положив в этом равенстве $x=a$, с учетом того, что $Q_{m-k}(a)\neq 0$, найдем

$$A_0=\frac{P_n(a)}{Q_{m-k}(a)}=\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,(x-a)^k\right)\Big|_{x=a}.$$

Продифференцируем теперь равенство (5.17) по x:

$$\left(\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}\right)'=A_1+2A_2(x-a)+\ \dots\ +(k-1)\,A_{k-1}(x-a)^{k-2}+$$
$$+\frac{[N'(x)\,(x-a)^k+k\,(x-a)^{k-1}N(x)]\,Q_{m-2}(x)-N(x)\,(x-a)^kQ_{m-2}(x)}{Q^2_{m-k}(x)}.$$

Полагая здесь $x=a$, найдем

$$A_1=\left(\frac{P_n(x)\,(x-a)^k}{Q_m(x)}\right)'_{x=a}=\left(\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}\right)'_{x=a}.$$

Еще раз продифференцировав равенство (5.17) и подставив в результат дифференцирования $x=a$, также найдем

$$A_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{P_n(x)\,(x-a)^k}{Q_m(x)}\right)''_{x=a}=\frac{1}{2!}\left(\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}\right)''_{x=a}.$$

Продолжая этот процесс, на k-м шаге получим общую формулу для вычисления коэффициентов разложения (5.14):

$$A_{k-1}=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{P_n(x)\,(x-a)^k}{Q_m(x)}\right)^{(k-1)}_{x=a}=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}\right)^{(k-1)}_{x=a}. \qquad (5.18)$$

Пример 7. Представить функцию $f(x)=\dfrac{3-x}{x(x-2)(x+5)}$ в виде суммы простейших дробей.

□ Согласно формуле (5.16), имеем

$$\frac{3-x}{x(x-2)(x+5)}=\frac{A_0}{x}+\frac{B_0}{x-2}+\frac{C_0}{x+5}.$$

Коэффициенты A_0, B_0 и C_0 находим по формуле (5.18), учитывая, что числа $x=0$, $x=2$ и $x=-5$ являются корнями кратности $k=1$ знаменателя функции $f(x)$:

$$A_0=\frac{3-x}{(x-2)(x+5)}\Big|_{x=0}=-\frac{3}{10};$$

$$B_0=\frac{3-x}{x(x+5)}\Big|_{x=2}=\frac{1}{14};$$

$$C_0=\frac{3-x}{x(x-2)}\Big|_{x=-5}=\frac{8}{35}.$$

Таким образом,

$$\frac{3-x}{x(x-2)(x+5)}=-\frac{3}{10x}+\frac{1}{14(x-2)}+\frac{8}{35(x+5)}.$$ ■

Пример 8. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)^3}$ на простейшие дроби.

□ $$\frac{x}{(x-1)(x+2)^3}=\frac{A_0}{x-1}+\frac{B_0}{(x+2)^3}+\frac{B_1}{(x+2)^2}+\frac{B_2}{x+2}.$$

Коэффициент A_0 находим по формуле (5.18) ($k=1$):

$$A_0=\frac{x}{(x+2)^3}\Big|_{x=1}=\frac{1}{27}.$$

Поскольку $x=-2$ есть корень кратности $k=3$ знаменателя функции $f(x)$, то по формуле (5.18) находим

$$B_0=\frac{x}{x-1}\Big|_{x=-2}=\frac{2}{3};$$

$$B_1=\left(\frac{x}{x-1}\right)'_{x=-2}=-\frac{1}{(x-1)^2}\Big|_{x=-2}=-\frac{1}{9};$$

$$B_2=\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)'_{x=-2}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{(x-1)^3}\Big|_{x=-2}=\frac{1}{27}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)^3}=\frac{1}{27(x-1)}+\frac{2}{3(x+2)^3}-\frac{1}{9(x+2)^2}+\frac{1}{27(x+2)}.$$ ■

3. Способ частных значений. Суть этого способа также поясним на примерах.

Пример 9. Функцию $\dfrac{3x^2+x-1}{(x-1)(x+2)x}$ разложить на простейшие дроби.

□ $$\frac{3x^2+x-1}{(x-1)(x+2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x}.$$

Приводя к общему знаменателю дроби в правой части этого равенства и отбросив затем знаменатель, придем к равенству

$$3x^2 + x - 1 = A(x+2)x + B(x-1)x + C(x-1)(x+2).$$

Полагая здесь последовательно $x = 0$; $x = 1$ и $x = -2$, получаем, что $-1 = -2C$; $3 = 3A$; $9 = -6B$, т. е. $A = 1$; $B = -\frac{3}{2}$; $C = \frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\frac{3x^2 + x - 1}{(x-1)(x+2)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(x+2)} + \frac{1}{2x}. \blacksquare$$

Пример 10. Разложить на простейшие дроби функцию $\frac{2x+1}{(x-1)^2 x}$.

$$\square\ \frac{2x+1}{(x-1)^2 x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)}{(x-1)^2 x}.$$

Отсюда

$$2x + 1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1). \qquad (5.19)$$

Полагая здесь последовательно $x = 0$, $x = 1$, найдем, что $A = 1$; $B = 3$. Продифференцировав равенство (5.19), получим

$$2 = 2A(x-1) + B + C(x-1) + Cx$$

или

$$2 = 2(x-1) + 3 + C(x-1) + Cx.$$

При $x = 1$ найдем, что $C = -1$. Итак, окончательно имеем

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2 x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}. \blacksquare$$

Следующий пример иллюстрирует способ отыскания первообразной от рациональной функции.

Пример 11. Вычислить $\int \frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4 (x+1)^2}\,dx$.

□ Подынтегральная функция разложена нами на простейшие дроби в примере 5. Поэтому

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4 (x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x+1} + C. \blacksquare$$

Задачи и упражнения

Вычислить:

1. $\int \frac{3dx}{2x+5}$; 2. $\int \frac{3x-4}{2x-3}\,dx$; 3. $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)}\,dx$;

4. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3}\,dx$; 5. $\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)}$.

5.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Интегрирование рациональных функций. Функции вида

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

где P и Q — многочлены от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, называются *рациональными функциями* от u_1, u_2, u_n. Если, в частности, $u_1 = \varphi_1(x), \ldots, u_n = \varphi_n(x)$, где $\varphi_i(x)$ — некоторые функции, $i = 1, 2, \ldots, n$, то функция $R[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$ называется рациональной функцией от $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2+2)^2} + \sqrt[6]{(x-1)^5}}{x^2\left(1 - \sqrt[5]{(x+1)^3}\right)}$$

является рациональной функцией от x, $\sqrt[3]{x^2+2}$, $\sqrt[6]{x-1}$, $\sqrt[5]{x+1}$, т. е. $f(x) = R\left(x, \sqrt[3]{x^2+2}, \sqrt[6]{x-1}, \sqrt[5]{x+1}\right)$.

Первообразные иррациональных функций являются элементарными функциями в сравнительно редких случаях. Основным методом вычисления неопределенных интегралов от иррациональных функций является *метод рационализации подынтегрального выражения*, т. е. метод нахождения таких подстановок, которые приводят данный интеграл к интегралу от рациональной функции. Относительно указанной подстановки будем говорить, что она *рационализирует* интеграл от рассматриваемой функции.

Остановимся на важнейших случаях, когда подстановкой интегрирование иррациональной функции сводится к интегрированию рациональных функций.

Интегралы вида $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right] dx$. Рассмотрим интегралы указанного типа, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — рациональные числа. Пусть m — общий знаменатель этих чисел, т. е. $p_i = \frac{q_i}{m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где q_i — целые числа.

Вводим замену $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, откуда $x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m}$; $dx = \frac{(ad-bc)\,t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\,dt$,

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1} = t^{q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n} = t^{q_n}.$$

Подстановка этих выражений в исходный интеграл преобразует его к виду

$$\int R^*(t, t^{q_1}, \ldots, t^{q_n})\,dt = \int R^*(t)\,dt,$$

где $R^*(t)$ — рациональная функция от t.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

□ Преобразуем интеграл следующим образом.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2}}\,dx = \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \times \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$

Сделаем замену переменной, положив $t^2 = \dfrac{x-2}{x-1}$. Тогда

$$x = \frac{2-t^2}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}; \quad x-1 = \frac{1}{1-t^2}; \quad x-2 = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

В итоге

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{2t^2(1-t^2)^2}{t^2(1-t^2)^2}\,dt = 2\int dt = 2t + C =$$

$$= 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C. \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}\right)}$.

□ Положив $t^3 = \dfrac{x-1}{x}$, получим

$$x = \frac{1}{1-t^3}; \quad dx = -\frac{3t^2dt}{(1-t^3)^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}\right)} =$$

$$= 3\int \frac{t^2dt}{(1-t)(2+t)(t^2+t+1)}.$$

Подынтегральную функцию разложим на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(1-t)(2+t)(t^2+t+1)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{2+t} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1}.$$

Коэффициенты A и B находим по формуле (5.18) при $k = 1$:

$$A = \left.\frac{t^2}{(2+t)(t^2+t+1)}\right|_{t=1} = \frac{1}{9}; \quad B = \left.\frac{t^2}{(1-t)(t^2+t+1)}\right|_{t=-2} = \frac{4}{9}.$$

Для нахождения коэффициентов C и D воспользуемся формулой (5.18). Так как корнями трехчлена t^2+t+1 являются числа $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$, то в соответствии с формулой (5.18) имеем

$$C\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + D = \left.\frac{t^2}{(1-t)(2+t)}\right|_{t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i},$$

откуда находим $D = -\dfrac{2}{3}$; $\quad C = -\dfrac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\int \frac{t^2dt}{(1-t)(2+t)(t^2+t+1)} = \int \left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2+t} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{4}{9}\int \frac{dt}{2+t} - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{9}\ln|1-t| + \frac{4}{9}\ln|2+t| - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1}.$$

Так как

$$\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t+\frac{1}{2}\right)+C,$$

то окончательно

$$\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)} = -\frac{1}{3} \ln \left|1-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right| + \frac{4}{9} \ln \left|2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right| -$$

$$-\frac{1}{6} \ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\right)+C. \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx.$

□ Рассматриваемый интеграл имеет вид $\int \frac{x+x^{2/3}+x^{1/6}}{x\left(1+x^{1/3}\right)} dx$, в котором $p_1=\frac{2}{3}$; $p_2=\frac{1}{6}$; $p_3=\frac{1}{3}$. Общим знаменателем этих дробей является число $m=6$. Поэтому вводим замену $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ и искомый интеграл приводим к виду

$$6\int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1} dt = 6\int \left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right) dt = \frac{3}{2} t^4 + 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Так как $t=\sqrt[6]{x}$, то окончательно имеем

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \blacksquare$$

Интегралы вида $\int R\left[x, \sqrt{ax^2+bx+b}\right] dx$. Подстановки Эйлера. В интегралах вида

$$\int R\left[x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right]dx \tag{5.20}$$

рационализация подынтегрального выражения достигается одной из трех *подстановок Эйлера:*

1) если $a>0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t; \tag{5.21}$$

2) если $c>0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{c} \pm xt; \tag{5.22}$$

3) если x_1 и x_2 — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c, т. е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то в этом случае

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_0), \tag{5.23}$$

где x_0 — один из корней трехчлена.

Заметим, что знаки в равенствах (5.21) и (5.22) можно брать в *любой комбинации*, но следует иметь в виду, что выбор знака (как и выбор самой подстановки) сильно влияет на сложность вычисления интеграла.

Покажем для примера, что замена (5.21) рационализирует подынтегральное выражение (5.20). Для определенности в соотношении (5.21) возьмем верхние знаки. Тогда

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,tx + t^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b}; \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t + b)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t + b}.$$

Подставив эти выражения в равенство (5.20), получим интеграл вида $\int R^*(t)\,dt$, где $R^*(t)$ — рациональная функция от t.

Аналогично показывается, что подстановки (5.22) и (5.23) рационализируют подынтегральное выражение в интеграле (5.20).

Пример 4. Вычислить $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$.

□ Положим $\sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1$ $(c = 1 > 0)$. Тогда

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}; \quad dx = 2\frac{t^2 - t + 1}{(1 - t^2)^2}\,dt; \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{1 - t + t^2}{1 - t^2},$$

и интеграл сводится к виду

$$\int \frac{-2t\,dt}{1 - t^2} = \ln|1 - t^2| + C.$$

Так как $t = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$, то окончательно имеем

$$\int \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx = \ln\left|1 - \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}\right)^2\right| + C. \blacksquare$$

Пример 5. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}$.

□ Так как $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 2)(x - 1)$, то в соответствии с равенством (5.23) положим $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} = t(x - 2)$; $t = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}{x - 2}$.

Отсюда

$$x = \frac{2t^2 - 2}{t^2 - 2}; \quad dx = -\frac{4t\,dt}{(t^2 - 2)^2}; \quad \sqrt{2x^2 - 6x + 4} = \frac{2t}{t^2 - 2}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}} = -\int \frac{4t(t^2 - 2)\,dt}{2t(t^2 - 2)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t + \sqrt{2}}{t - \sqrt{2}}\right| +$$

$$+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}\right|+C. \blacksquare$$

Подстановки Эйлера (5.21)—(5.23) связаны обычно с громоздкими вычислениями, поэтому они применяются в том случае, если интеграл (5.20) не удается вычислить более простым способом. Существуют интегралы, вычисление которых упрощается использованием других подстановок, отличных от эйлеровых. Например, так как

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

то, положив $x+\frac{b}{2a}=t$, интеграл (5.20) можно свести к одному из трех интегралов

$$\int R^*\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)dt; \int R^*\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)dt; \int R^*\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt,$$

где R^* — рациональная функция. Для вычисления последних интегралов удобна одна из следующих тригонометрических подстановок:

$$t=\sin u;\ t=\cos u;\ t=\operatorname{tg} u$$

или гиперболических подстановок

$$t=\operatorname{sh} u;\ t=\operatorname{ch} u;\ t=\operatorname{th} u.$$

Пример 6. Вычислить $\int\frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

□ Так как $2+x-x^2=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, то, положив $x-\frac{1}{2}=t$; $dx=dt$, получим

$$\int\frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=2\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-t^2}}=$$

$$=2\arcsin\frac{2t}{3}+C=2\arcsin\frac{2x-1}{3}+C. \blacksquare$$

Интегрирование дифференциального бинома. Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ называется *дифференциальным биномом*. Здесь a и b — постоянные, а m, n и p — рациональные числа. Ставится задача о вычислении интеграла

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx. \tag{5.24}$$

Сделаем замену

$$x^n=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{n}},\qquad dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt.$$

Тогда

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt.$$

Обозначив $\frac{m+1}{n} - 1 = q$, получим

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int t^q (a + bt)^p dt, \qquad (5.25)$$

где p и q — рациональные числа. Интеграл (5.25) выражается в элементарных функциях, если одно из чисел p, $q = \frac{m+1}{n} - 1$ или $p + q = p + \frac{m+1}{n} - 1$ является целым числом.

Действительно, если p — целое число, то выражение $t^q (a + bt)^p$ является рациональной функцией.

Если число $q = \frac{m+1}{n} - 1$ целое, то интеграл (5.25) является интегралом вида $\int R[t, (a + bt)^p] dt$, где p — рациональное число, а R — рациональная функция.

Наконец, если $p + q$ — целое число, то интеграл (5.25) сводится к виду

$$\int t^q (a + bt)^p dt = \int t^{p+q} \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p dt = \int R\left[t, \left(\frac{a + bt}{0 + 1t}\right)^p\right] dt,$$

где R — рациональная функция.

В остальных случаях, как доказал П. Л. Чебышев*, интеграл от дифференциального бинома не выражается в элементарных функциях.

Применительно к интегралу (5.24) полученный результат можно сформулировать следующим образом: *если одно из чисел* p, $(m + 1)/n$ *или* $(m + 1)/n + p$ *является целым, то интеграл (5.24) выражается в элементарных функциях.* При этом:

1) если p — целое, то замена $x^n = t$ рационализирует интеграл (5.24);

2) если $(m + 1)/n$ — целое, то интеграл (5.24) подстановкой $t = x^n$ сводится к интегралу $\int R[t, (a + bt)^p] dt$, где $p = p_1/s$ (p_1 и s — целые числа). Последний, как известно, можно рационализировать подстановкой $a + bt = z^s$, что для интеграла (5.24) равносильно подстановке

$$a + bx^n = z^s, \qquad (5.26)$$

где s — знаменатель дроби p;

3) если $(m + 1)/n + p$ — целое число, то интеграл (5.24) сводится подстановкой $t = x^n$ к интегралу $\int R\left[t, \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p\right] dt$, где $p = p_1/s$, который рационализируется подстановкой $(a + bt)/t = z^s$. В применении к интегралу (5.24) это определяет подстановку

$$(a + bx^n)/x^n = ax^{-n} + b = z^s, \qquad (5.27)$$

где s — знаменатель дроби p.

---

* П. Л. Чебышев (1821—1894) — русский математик и механик.

Пример 7. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int x^{-2}(x^2-1)^{-1/2}dx.$

□ Здесь $m=-2$; $n=2$; $p=-1/2$. Так как $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$ $=-1$ — целое число, то в соответствии с заменой (5.27) получим

$$-x^{-2}+1=z^2 \Rightarrow 1-z^2=x^{-2} \Rightarrow x=(1-z^2)^{-1/2};\ dx=z(1-z^2)^{-3/2};$$

$$(x^2-1)^{-1/2}=\frac{(1-z^2)^{-1/2}}{z}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{(1-z^2)(1-z^2)^{1/2}z\,(1-z^2)^{-3/2}}{z}dz = \int dz = z+C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C,$$

так как $z=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. ■

Пример 8. Вычислить $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx.$

□ В данном случае $m=-1/2$; $n=1/4$; $p=1/3$. Так как $(m+1)/n=2$, то в соответствии с заменой (5.26) положим

$$t=\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3} \Rightarrow x=(t^3-1)^4,\ dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt.$$

Тогда

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 12\int (t^6-t^3)\,dt = \frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C =$$

$$=\frac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3}\left[4\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-7\right]+C.$$ ■

Интегрирование тригонометрических выражений. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{5.28}$$

где R — рациональная функция переменных $u_1=\sin x$ и $u_2=\cos x$.

Покажем, что интеграл (5.28) рационализируется так называемой *универсальной тригонометрической подстановкой* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Действительно,

$$x=2\operatorname{arctg}t;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{5.29}$$

так что

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R^*(t)\,dt,$$

где R^* — рациональная функция.

Пример 9. Вычислить $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

□ Используя подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, с учетом соотношений (5.29) получим

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=\frac{1}{2-t}+C=\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C. \blacksquare$$

Иногда удобно применять другие подстановки. Например, если подынтегральную функцию $R(\sin x, \cos x)$ можно представить в виде функции $R^*(\operatorname{tg} x)$, то лучше воспользоваться подстановкой $t=\operatorname{tg} x$, для которой

$$x=\operatorname{arctg} t;\ dx=\frac{dt}{1+t^2};\ \sin x=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Пример 10. Вычислить $I=\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{tg} x\sin^4 x}$.

□ Так как $\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, то $I=\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 dx}{\cos^2 x\operatorname{tg}^5 x}=|\operatorname{tg} x=t|=$

$$=\int \frac{(1+t^2)^2}{t^5}dt=\int \frac{dt}{t^5}+2\int \frac{dt}{t^3}+\int \frac{dt}{t}=-\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t^2}+\ln|t|+C=$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\ln|\operatorname{tg} x|+C. \blacksquare$$

В следующих случаях полезно применять другие подстановки, быстрее приводящие к цели:

1) подстановку $\cos x=t$, если $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$;
2) подстановку $\sin x=t$, если $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$;
3) подстановку $\operatorname{tg} x=t$, если $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$.

Пример 11. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}=\int \frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}$.

□ Так как $R(\sin x, \cos x)=\frac{1}{2\sin^2 x\cos x}$ и $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, то применяем подстановку $\sin x=t$. Имеем

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}=\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{d(\sin x)}{2\sin^2 x(1-\sin^2 x)}=\int \frac{dt}{2t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\times$$

$$\times\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2}\right)dt=-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\times$$

$$\times\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C. \blacksquare$$

При вычислении интегралов вида (5.28) широко применяются известные из школьного курса тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

Например, $\int\sin 3x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x-$ $-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

Часто полезны формулы

$$\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2,\quad \cos^2 x=(1+\cos 2x)/2.$$

Они применяются при вычислении интегралов от функций вида $\cos^n x$, $\sin^n x$, $\sin^n x\cos^m x$.

Пример 12. $\int\cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$ $=\int\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{8}\right)dx=\frac{3}{8}x+$ $+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

Пример 13. $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\,d\sin x=\int(\sin^2 x-\sin^4 x)\times$ $\times\, d\sin x=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

Задачи и упражнения

Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; 2. $\int\sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx$;
3. $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}$; 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; 5. $\int\frac{(3x+4)\,dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$;
6. $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; 7. $\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$; 8. $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{1+\cos^2 x}$; 9. $\int\cos^3 x\,dx$; 10. $\int\sin^4 x\,dx$.

5.4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегральные суммы. Определенный интеграл, его геометрический и физический смысл. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. *Разбиением отрезка* $[a, b]$ назовем конечное множество точек x_0, x_1, ..., x_n, где

$$a=x_0<x_1<x_2<\ \ldots\ <x_{n-1}<x_n=b.$$

Обозначим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$, и пусть $\Delta=\max\{\Delta x_i\}$ — длина максимального из отрезков разбиения, называемая *диаметром*

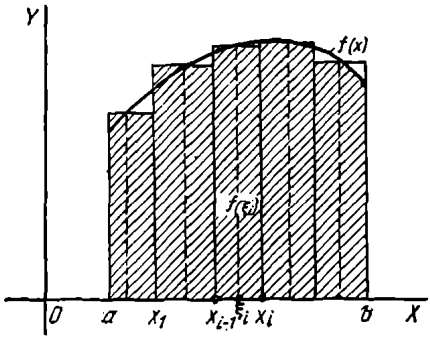


Рис. 5.1

разбиения. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, произвольно выберем точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\ \Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\ \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (5.30)$$

которая называется *интегральной суммой Римана** функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a, b]$ и выбору точек ξ_i.

Рассмотрим предел интегральных сумм (5.30) при стремлении диаметра разбиения к нулю, т. е.

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Если существует этот предел, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора промежуточных точек ξ_i, то говорят что функция $f(x)$ *интегрируема по Риману* на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Он также называется *интегралом Римана* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Итак, по определению,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \qquad (5.31)$$

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ есть некоторое число I. Заметим также, что $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, т. е. безразлично, по какой переменной x или t интегрировать на отрезке $[a, b]$, ибо в обоих случаях интеграл определяется равенством (5.31).

Выясним геометрический смысл интегральных сумм Римана. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, причем $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$. Назовем *криволинейной трапецией* фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью X (рис. 5.1). Тогда произведение $f(\xi_i)\,\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{x-1}$ и высотой $f(\xi_i)$, а сумма $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 5.1. Если при стремлении к нулю диаметра

* Б. Риман (1826—1866) — немецкий математик.

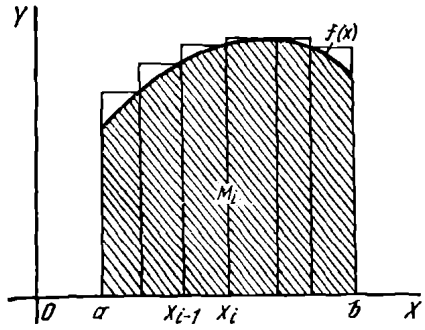


Рис. 5.2

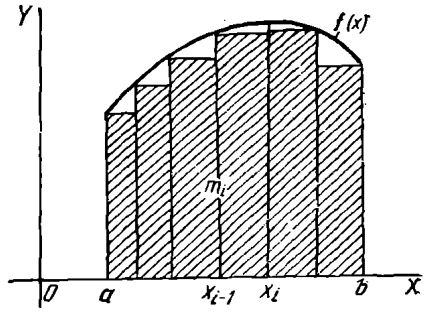


Рис. 5.3

разбиения отрезка $[a, b]$ существует предел (5.31), то естественно величину I назвать площадью криволинейной трапеции.

Таким образом, *с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции.*

Выясним физический смысл определенного интеграла.

Пусть точка движется прямолинейно вдоль числовой оси со скоростью $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, меняющейся непрерывно. Смещение точки за малый промежуток времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ приближенно можно считать равным $v(\tau_i)\,\Delta t_i$, где $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Тогда интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\,\Delta t_i$ представляет собой приближенный путь, пройденный точкой от момента t_0 до момента времени T. В пределе при $\Delta = \max\{\Delta t_i\} \to 0$ получим точное значение этого пути S, т. е.

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \tag{5.32}$$

Свойства интегральных сумм. Введем понятие верхней и нижней интегральных сумм. Пусть дано разбиение отрезка $[a, b]$ и $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$. Тогда суммы $\overline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\underline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ называются *верхней* и *нижней* интегральными суммами, составленными для данного разбиения. Так как

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

и $\Delta x_i > 0$, то очевидно следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

т. е. имеет место соотношение

$$\underline{\sigma}_n \leqslant \sigma_n \leqslant \overline{\sigma}_n, \tag{5.33}$$

где $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ — интегральная сумма Римана, отвечающая данному разбиению.

Геометрически верхняя и нижняя интегральные суммы представляют собой площади заштрихованных ступенчатых (состоящих из прямоугольников) фигур, представленных на рис. 5.2 и 5.3 соответственно. При этом верхняя сумма $\overline{\sigma}_n$ равна площади фигуры, содержащей криволинейную трапецию, а нижняя сумма $\underline{\sigma}_n$ равна площади фигуры, содержащейся в криволинейной трапеции. Очевидно, если разность $\overline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n$ может быть сколь угодно малой, то суммы $\overline{\sigma}_n$ и $\underline{\sigma}_n$ могут быть сколь угодно близкими к площади криволинейной трапеции.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.4. Верхняя (нижняя) интегральная сумма является точной верхней (нижней) гранью значений интегральных сумм Римана, соответствующих одному и тому же разбиению отрезка $[a, b]$, т. е.

$$\overline{\sigma}_n = \sup_{\xi_i} \sigma_n = \sup_{\xi_i} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i; \qquad \underline{\sigma}_n = \inf_{\xi_i} \sigma_n = \inf_{\xi_i} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{5.34}$$

□ Для доказательства первого из равенств (5.34) надо установить два факта: 1) $\overline{\sigma}_n$ — верхняя грань множества интегральных сумм σ_n; 2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется σ_n, такая, что $\overline{\sigma} < \sigma_n + \varepsilon$. Первый факт следует из соотношения (5.33). Докажем второй факт. По определению точной верхней грани M_i, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, что $M_i < f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для выбранных точек ξ_i имеем

$$\overline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \varepsilon,$$

так как $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$, т. е.

$$\overline{\sigma}_n < \sigma_n + \varepsilon. \tag{5.35}$$

Таким образом, второй факт установлен. Точно так же доказывается второе из равенств (5.34). ■

Классы интегрируемых функций. Установим теперь *необходимое условие интегрируемости* функций.

Теорема 5.5. Для интегрируемости функции $f(x)$ по Риману на отрезке $[a, b]$ необходимо, чтобы она была ограничена на нем.

□ Если $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$, то она будет неограниченной хотя бы на одном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ для любого разбиения. Это значит, что можно выбрать точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ так, что величина $|f(\xi_i)|\,\Delta x_i$ окажется сколь угодно большой, т. е. сумму $\sigma_n =$

$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ можно сделать по модулю сколь угодно большой за счет выбора точки ξ_i. Это означает, что последовательность (σ_n) не имеет конечного предела, т. е. интегрируемыми по Риману могут быть только ограниченные функции. ■

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия интегрируемости по Риману.

Теорема 5.6. Для интегрируемости по Риману ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta\to 0}\overline{\sigma}_n = \lim_{\Delta\to 0}\underline{\sigma}_n = I. \tag{5.36}$$

При этом их общее значение I совпадает с интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$.

□ *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, т. е. существует $\lim_{\Delta\to 0}\sigma_n = I$ для любого разбиения этого отрезка. Тогда из соотношений (5.33) и (5.35) заключаем, что существует $\lim_{\Delta\to 0}\overline{\sigma}_n = I$. Аналогично проверяется существование $\lim_{\Delta\to 0}\underline{\sigma}_n = I$.

Достаточность. Пусть имеет место равенство (5.36). Тогда на основании соотношения (5.33) и свойства 6° предела промежуточной последовательности (см. формулу (2.10)) получим $\lim_{\Delta\to 0}\sigma_n = I$. ■

Будем называть *колебанием функции* $f(x)$ на множестве X величину

$$\omega(f, X) = \sup_{x_1,\, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

т. е. колебание $\omega(f, X)$ есть точная верхняя грань модуля разности значений функции на всевозможных парах точек $x_1, x_2 \in X$. Например, для функции $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$, колебание $\omega(x^2, [-1, 2]) = 4$, а для функции $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, имеем $\omega(\sin x, [0, 2\pi]) = 2$.

Если $f(x)$ — функция, определенная на отрезке $[a, b]$, то

$$\omega(f, X) = M - m, \tag{5.37}$$

где $m = \inf_{x\in[a,\,b]} f(x)$; $M = \sup_{x\in[a,\,b]} f(x)$. В частности, если $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, то $M = \max_{x\in[a,\,b]} f(x)$; $m = \min_{x\in[a,\,b]} f(x)$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.7. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f, [x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = 0. \tag{5.38}$$

Справедливость теоремы 5.7 вытекает из равенства (5.37), соотношения $\sum_{i=1}^{n}\omega(f, [x_{i-1}, x_i])\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \overline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n$ и теоремы 5.6.

Следствие 1. Непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции интегрируемы на нем по Риману.

□ Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда, согласно теореме Кантора, она равномерно непрерывна на этом отрезке. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что для любых $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Выберем разбиение отрезка, такое, что $\Delta < \delta$. Тогда из неравенства $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ следует, что $\omega(f, [x_{i-1}, x_i]) = M_i - m_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В таком случае

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon,$$

а это, согласно теореме 5.7, и означает интегрируемость по Риману функции $f(x)$ на $[a, b]$. ■

Следствие 2. Монотонные на отрезке $[a, b]$ функции интегрируемы на нем по Риману.

□ Пусть $f(x)$ — монотонная на $[a, b]$ функция. Для определенности будем считать ее монотонно возрастающей, т. е. $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$. В этом случае $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$; $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ для любого разбиения отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\,\Delta x_i \leqslant \Delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) = \Delta \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) =$$

$$= \Delta \left[\left(\sup_{x \in [a, x_1]} f(x) - \inf_{x \in [a, x_1]} f(x) \right) + \left(\sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x) - \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x) \right) + \ldots + \left(\sup_{x \in [x_{n-1}, b]} f(x) - \inf_{x \in [x_{n-1}, b]} f(x) \right) \right] \leqslant \Delta\,[f(b) - f(a)],$$

так как $\sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leqslant \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Отсюда при $\Delta = \max\{\Delta x_i\} \to 0$ и получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\,\Delta x_i \to 0$, т. е. монотонная на $[a, b]$ функция интегрируема по Риману. ■

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *кусочно-непрерывной*, если она имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода.

Следствие 3. Кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем по Риману.

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из следствия 1.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^b x^3 dx = I$.

□ Функция $f(x) = x^3$ интегрируема на $[0, b]$ в силу ее непрерывности. По-

этому интеграл I существует. Для его вычисления разобьем отрезок $[0, b]$ на n равных частей точками

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1\Delta x;\ x_2 = 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = b = n\Delta x,$$

где $\Delta x = \dfrac{b}{n} = \Delta x_i$.

За точки ξ_i возьмем, к примеру, крайние левые точки каждого частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)\,\Delta x,\ i\Delta x]$, $i = 1,2,\ \ldots,\ n$, т. е. $\xi_i = (i-1)\,\Delta x$. Тогда $f(\xi_i) = \xi_i^3 = (i-1)^3\,\Delta x^3 = \dfrac{b^3}{n^3}(i-1)^3$. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 = \frac{b^4}{n^4}[1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3].$$

Учитывая, что $1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \dfrac{(n-1)^2n^2}{4}$ (см. задачу 4в, § 1.1), получаем $\int\limits_0^b x^3dx = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b^4(n-1)^2n^2}{4n^4} = \dfrac{b^4}{4}$. ■

Основные свойства определенного интеграла. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые на $[a, b]$ функции. Тогда имеют место следующие свойства.

1°. Будем считать, что

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0,$$

и рассматривать это равенство как соглашение, являющееся естественным распространением понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины.

2°. $\int\limits_a^b dx = b - a$.

□ $\int\limits_a^b dx = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b - a$. ■

3°. Для любых α и β из $\mathbf{R}$

$$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{5.39}$$

□ По определению

$$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \alpha\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i +$$

$$+ \beta\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$ ■

4°. Если $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$, $a < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{5.40}$$

□ Так как $f(\xi_i) \geqslant 0$, $\forall \xi_i \in [a, b]$ и $\Delta x_i > 0$, то $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим соотношение (5.40). ■

5°. Если $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx, \quad a < b. \tag{5.41}$$

■ Свойство 5° является следствием свойств 3° и 4°.

6°. Имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b. \tag{5.42}$$

□ По определению $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| = \lim_{\Delta\to 0}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \times \right.$ $\left. \times \Delta x_i\right| \leqslant \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i)\right|\Delta x_i = \int_a^b |f(x)|\,dx$, так как $\Delta x_i > 0$. ■

7°. Пусть $M = \sup\limits_{[a,\,b]} f(x)$; $m = \inf\limits_{[a,\,b]} f(x)$, тогда

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{5.43}$$

□ Действительно, так как $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$, то в силу соотношения (5.41) имеем

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx,$$

откуда и следует неравенство (5.43). ■

8°. Имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.44}$$

Формула (5.44), рассматриваемая как соглашение, является естественным обобщением понятия интеграла на случай, когда отрезок $[a, b]$ при $a < b$ пробегается в направлении от b к a. В этом случае все $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$.

9°. Для любых чисел a, b и c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{5.45}$$

если все три интеграла существуют.

□ Пусть $a < c < b$. В силу интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$ будем рассматривать такие разбиения отрезка $[a, b]$, которые содержат точку c в качестве точки разбиения. Каждое такое разбиение отрезка $[a, b]$ порождает в свою очередь разбиение отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, и интегральная сумма для $f(x)$ на $[a, b]$ равна сумме интеграль-

ных сумм этой функции на $[a, c]$ и $[c, b]$. В пределе при $\Delta \to 0$ получим формулу (5.45).

Если точка c лежит вне отрезка $[a, b]$, то $[a, b]$ есть часть $[a, c]$ (или $[c, b]$). Например, если $a < b < c$, то по формуле (5.45) получим

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Согласно свойству 8°, получаем формулу (5.45). ■

Поясним применение свойств интегралов на примерах.

Пример 2. Оценить $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5 + 2\sin x}}$.

□ Так как $m = \inf\limits_{[0,2\pi]} \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ (она достигается в точке $x = \frac{\pi}{2}$) и $M = \sup\limits_{[0,2\pi]} \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (она достигается в точке $x = 3\pi/2$), то, согласно неравенству (5.43), имеем

$$\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5 + 2\sin x}} \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$ ■

Пример 3. Сравнить $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ и $\int_0^1 x^2 dx$.

□ Так как $\sqrt{x} > x^2$ при $0 < x < 1$, то $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx > \int_0^1 x^2 dx$. ■

Пример 4. Доказать неравенство $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$.

□ Так как при $0 < x < 1$ справедливо неравенство $1 < e^{x^2} < e$, то

$$1 = \int_0^1 1\,dx < \int_0^1 e^{x^2} dx < \int_0^1 e\,dx = e.$$ ■

Теорема о среднем. Следующее свойство определенного интеграла сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.8 (о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a). \tag{5.46}$$

□ В силу соотношения (5.43) имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M,$$

где $m = \inf\limits_{[a,\,b]} f(x)$; $M = \sup\limits_{[a,\,b]} f(x)$. Отсюда видно, что число $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$ является промежуточным значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

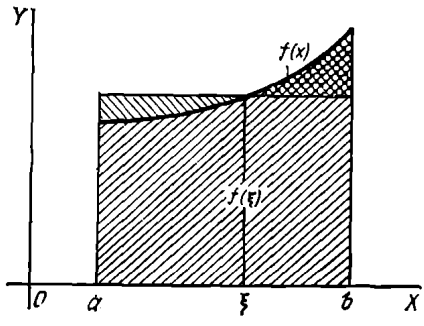


Рис. 5.4

По теореме 2.14 о промежуточном значении непрерывной функции существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare \quad (5.47)$$

Теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник со сторонами $b-a$ и $f(\xi)$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции (рис. 5.4).

Число $f(\xi)$, определяемое формулой (5.47), называется *средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$*.

Пример 5. Найти среднее значение фукции $f(x) = x^3$ на отрезке $[0, b]$.

□ Так как $\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$ (см. пример 1), то

$$f(\xi) = \frac{1}{b}\int_0^b x^3 dx = \frac{b^3}{4}. \quad \blacksquare$$

Задачи и упражнения

1. Исходя из определения, вычислить $\int_0^3 (2x+3)\,dx$.

2. Не вычисляя $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$, определить знак этого интеграла.

3. Оценить $\int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx$.

4. Доказать неравенство $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$.

5.5. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Интеграл с переменным верхним пределом. Пусть f — интегрируемая на $[a, b]$ функция. Тогда для любого $x \in [a, b]$ она будет интегрируемой и на отрезке $[a, x]$. Выясним зависимость интеграла от верхнего предела интегрирования, т. е. рассмотрим интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad (5.48)$$

являющийся функцией верхнего предела x. В равенстве (5.48) использована переменная интегрирования t с тем, чтобы отличить ее от

верхнего предела интегрирования x. Рис. 5.5 наглядно интерпретирует $\Phi(x)$ как площадь криволинейной трапеции $S(x)$, являющейся функцией правого конца отрезка $[a, x]$.

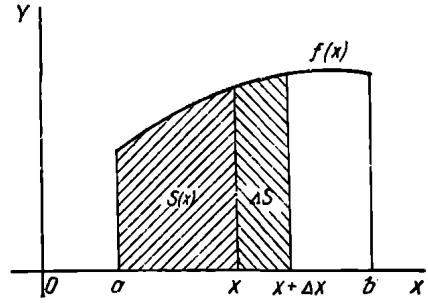


Рис. 5.5

Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.9. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция Φ, определяемая равенством (5.48), непрерывна на этом отрезке (более того, она равномерно непрерывна на нем). Если же в точке $x \in [a, b]$ функция f непрерывна, то в этой точке функция Φ дифференцируема, причем имеет место равенство

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x). \tag{5.49}$$

□ Пусть f — интегрируемая на $[a, b]$ функция. Тогда по теореме 5.5 она ограничена на $[a, b]$, т. е. существует число K, такое, что $|f(x)| \leqslant K$, $\forall x \in [a, b]$. Придадим x приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in [a, b]$. Тогда

$$|\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| = \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} K\,dx\right| = K|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что если для любого $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, то из неравенства $|\Delta x| < \delta$ следует неравенство $|\Delta\Phi(x)| = |\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| < \varepsilon$, что и доказывает непрерывность (равномерную) функции $\Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть теперь f непрерывна в точке $x \in [a, b]$. Тогда

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(x) + f(t) - f(x)]\,dt = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt + \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(t) - f(x)]\,dt = f(x) + \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} [f(t) - f(x)]\,dt. \tag{5.50}$$

Оценим последний интеграл по абсолютной величине. В силу непрерывности функции f в точке x для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

неравенство $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$, если только $|t-x|<\delta$. Тогда при $|\Delta x|<\delta$ имеем

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}[f(t)-f(x)]\,dt\right|<\varepsilon,$$

т. е. из соотношения (5.50) следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x).$$

Равенство (5.49) доказано. ■

Еще раз подчеркнем, что интеграл (5.48) является непрерывной функцией верхнего предела x в случае, если f интегрируема и не обязательно непрерывна, т. е. f может быть и разрывной интегрируемой функцией. Однако для дифференцируемости функции Φ в точке x требование непрерывности f в этой точке существенно.

Итак, если f непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$, то функция Φ дифференцируема в точке $x\in[a, b]$, и равенство (5.49) выполняется, т. е. *функция* $\Phi(x)$, *определенная равенством (5.48), является первообразной для функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. Этот факт имеет принципиальное значение, так как он связывает основные понятия дифференциального и интегрального исчисления воедино, т. е. он доказывает *существование первообразной* Φ *у каждой непрерывной функции* f *в виде (5.48).*

Пример 1. $\left(\int_0^x \ln\cos t\,dt\right)'_x=\ln\cos x,\ 0\leqslant x<\pi/2.$

Пример 2. $\left(\int_x^{10} e^{\sin t}(1-t^3)\,dt\right)'_x=\left(-\int_{10}^x e^{\sin t}(1-t^3)\,dt\right)'_x=-e^{\sin x}(1-x^3).$

Формула Ньютона — Лейбница. Фундаментальной для математического анализа является формула Ньютона — Лейбница, связывающая определенный интеграл с первообразной подынтегральной функции.

Теорема 5.10. Если f непрерывна на $[a, b]$ и F — любая ее первообразная на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{5.51}$$

□ Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. По теореме 5.9 функция (5.48) тоже является ее первообразной. Так как любые две первообразные для одной и той же функции f отличаются на постоянную величину, то имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C,\ \forall x\in[a, b].$$

Отсюда при $x=a$ получаем

$$\int_a^a f(t)\,dt=0=F(a)+C\Rightarrow C=-F(a),$$

так что

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad \forall x \in [a,\ b].$$

Положив здесь $x = b$, получим формулу (5.51). ■

Равенство (5.51) называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Часто разность $F(b) - F(a)$ записывается символом $F(x)\Big|_a^b$. В этих обозначениях формула Ньютона — Лейбница приобретает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

где F — любая первообразная функция f на $[a,\ b]$.

Пример 3. а) $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1;$

б) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$

Задачи и упражнения

1. Пусть $x^3 + 2x = \int_0^x f(t)\,dt$. Чему равно $f(3)$?

2. Вычислить $\Phi'(x)$, если:

а) $\Phi(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{\ln t + 1}dt$; $x > 1$; б) $\Phi(x) = \int_x^0 \cos\sqrt[3]{t}\ dt$.

3. Найти число C из равенства:

а) $\int_2^{C-1} 2dx = 6$; б) $\int_C^{C-2} x dx = 6$.

4. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $\int_0^x (t^3 - 1)\,dt$, причем $F(0) = -1$. Найти $F(-1)$.

5. Найти $\int_e^{e^e} \frac{dx}{x \ln x}$.

5.6. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Метод замены переменной (метод подстановки). Справедлива следующая

Теорема 5.11. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция, а $x = \varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[\alpha,\ \beta]$, такая, что $\varphi[\alpha,\ \beta] = [a,\ b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

справедлива *формула замены переменной в определенном интеграле*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t). \tag{5.52}$$

□ Пусть F — первообразная для функции f на $[a, b]$. Так как $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, то по формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \int_\alpha^\beta dF[\varphi(t)] =$$

$$= \int_\alpha^\beta F'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt. \blacksquare$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ по формуле (5.52) нужно ввести замену $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция, найти пределы интегрирования по t, решив уравнения $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, откуда $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ и $\beta = \varphi^{-1}(b)$ и получить формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \quad x = \varphi(t). \tag{5.53}$$

Важной особенностью формул (5.52) и (5.53) является то, что одновременно с заменой подынтегрального выражения изменяются соответствующим образом и пределы интегрирования.

Пример 1. Вычислить $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

□ Вводим замену $x = t^2$ $(t > 0)$. Отсюда при $x = 0$ имеем $t = 0$, а при $x = 4$ получим $t = 2$. По формуле (5.53)

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\,(t - \ln|1+t|)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3. \blacksquare$$

Формула (5.52), записанная в виде

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{5.54}$$

где $x = \varphi(t)$; $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, лежит в основе вычисления определенных интегралов *методом подстановки.*

Пример 2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,d\sin x.$$

□ Вводим подстановку $\sin x = t$. Отсюда $\alpha = \sin 0 = 0$; $\beta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, т.е.

$0 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \int\limits_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. ■

Интегралы от периодических, четных и нечетных функций. Справедлива следующая

Теорема 5.12. Пусть f — интегрируемая на $[-a, a]$ функция. Тогда: если f — четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx; \tag{5.55}$$

если f — нечетная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Если f — периодическая функция периода T, интегрируемая на каждом конечном отрезке, то при любом $a \in \mathbf{R}$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx. \tag{5.56}$$

□ Пусть $f(x)$ — интегрируемая на $[-a, a]$ функция. Имеем

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

В первом интеграле справа сделаем замену

$$(x = -t,\ x \in [-a,\ 0]) \Rightarrow (dx = -dt,\ t \in [a,\ 0]).$$

Тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_a^0 f(-t)\,dt + \int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(-x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx. \tag{5.57}$$

Если f — четная функция ($f(-x) = f(x)$), то из равенства (5.57) следует равенство (5.55). Если f — нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$), то из равенства (5.57) получаем, что

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = 0.$$

Пусть теперь f — периодическая функция периода T. Имеем

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx. \tag{5.58}$$

Введем замену $x = t + T$; $t = x - t$; $dx = dt$. Тогда

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(t+T)\,dt = \int\limits_0^a f(t)\,dt = \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Учитывая это, из равенства (5.58) получаем

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Формула (5.56) доказана. ■

Пример 3. $\int_0^{6\pi} \sin^5 x\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^5 x\,dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^5 x\,dx + \int_{4\pi}^{6\pi} \sin^5 x\,dx = 3\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\,dx = 0$

в силу нечетности функции $\sin^5 x$ и ее периодичности с периодом $T = 2\pi$.

Интегрирование по частям. Этот метод основывается на следующей теореме.

Теорема 5.13. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции. Тогда имеет место *формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \tag{5.59}$$

□ На основании равенства $d(uv) = udv + vdu$ и формулы Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b = \int_a^b (udv + vdu),$$

что и доказывает равенство (5.59). ■

Формула (5.59) равносильна формуле

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{5.60}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_1^e x \ln x\,dx$.

$$\square \int_1^e x \ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x;\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx;\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}. \blacksquare$$

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Метод интегрирования по частям позволяет получить еще один вид остаточного члена формулы Тейлора.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.14. Если функции f и g принадлежат классу $C^{(n+1)}$ $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)\,g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)\right]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b f(x) \times$$

$$\times g^{(n+1)}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[f^{(n-k)}(b)\,g^{(k)}(b) - f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a)\right] +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b f(x)\,g^{(n+1)}(x)\,dx. \qquad (5.61)$$

□ При $n = 0$ эта формула совпадает с формулой (5.60), где $u = g$; $v = f$. Пусть верно соотношение

$$\int_a^b f^{(n)}(x)\,g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[f^{(n-k-1)}(x)\,g^{(k)}(x)\right]\Big|_a^b + (-1)^n\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\,dx.$$

Заменив в этом равенстве функцию f ее производной f', получим

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\right]\Big|_a^b + (-1)^n\int_a^b f'(x)g^{(n)}xdx. \qquad (5.62)$$

Последний интеграл вычислим по частям:

$$\int_a^b f'(x)g^{(n)}(x)dx = f(x)g^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g^{(n+1)}(x)dx. \qquad (5.63)$$

Подставив правую часть равенства (5.63) в соотношение (5.62), получим формулу (5.61), установленную по индукции. ■

Рассмотрим теперь функцию $g(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$, являющуюся многочленом n-й степени от t. Для нее

$$g_t^{(k)}(t) = (-1)^k\frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!},\ k = 0,1,\ \ldots,\ n;\ g_t^{(n+1)}(t) = 0. \qquad (5.64)$$

Положив в равенстве (5.61) $b = x$, а переменную интегрирования x заменив на t, получим

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[f^{(n-k)}(t)(-1)^k\frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!}\right]\Big|_{t=a}^{t=x} +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^x f(t)\cdot 0\cdot dt = f(x) - \sum_{k=0}^{n}f^{(n-k)}(a)\frac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!},$$

поскольку при $t = x$ от всей суммы останется лишь одно слагаемое при $k = n$, равное $f(x)$. Отсюда получаем формулу Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \ldots\ +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (5.65)$$

с остаточным членом R_n в интегральной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (5.66)$$

Формула (5.65) имеет следующую важную интерпретацию.

Как известно, первообразной функции f на $[a, b]$ называется функция F_1, такая, что $F_1(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, причем в качестве $F_1(x)$ можно взять функцию $F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Эту первообразную назовем *первообразной первого порядка*. Функция $F_1(x)$ как непрерывная на $[a, b]$ имеет в свою очередь первообразную $F_2(x)$, которая называется *первообразной второго порядка* функции f, т. е. $F_2'(x) = F_1(x)$ или $F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$. В качестве $F_2(x)$ можно по аналогии с предыдущим взять функцию

$$F_2(x) = \int_a^x F_1(x_1)\,dx_1 = \int_a^x \left(\int_a^{x_1} f(x_2)\,dx_2 \right) dx_1 = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_2)\,dx_2.$$

Вообще *первообразной n-го порядка* для функции f называется функция F, такая, что $F_n'(x) = F_{n-1}(x)$, $\forall x \in [a, b]$, или $F_n^{(n)}(x) = f(x)$. В качестве $F_n(x)$ можно взять функцию

$$F_n(x) = \int_a^x F_{n-1}(x_{n-1})\,dx_{n-1} = \underbrace{\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ \dots \ \int_a^{x_{n-1}}}_{n \text{ раз}} f(x_n)\,dx_n. \qquad (5.67)$$

Пусть $F(x)$ — первообразная порядка n для функции $f(x)$ на $[a, b]$, т. е. $F^{(n)}(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Согласно формуле (5.65), имеем

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \times$$
$$\times (x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt,$$

так как $F^{(n)}(t) = f(t)$ по условию. Продифференцировав это равенство n раз, получим соотношение

$$F^{(n)}(x) = f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \right)^{(n)},$$

из которого следует, что первообразной n-го порядка для f является функция

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt. \qquad (5.68)$$

С другой стороны, эту первообразную можно записать в виде (5.67). Сравнивая равенства (5.68) и (5.67), получаем следующую важную формулу для отыскания первообразной n-го порядка:

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ \dots \ \int_a^{x_{n-1}}}_{n \text{ раз}} f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt. \qquad (5.69)$$

Таким образом, нахождение первообразной любого порядка n можно свести, согласно формуле (5.69), к вычислению одного единственного интеграла.

Первообразная первого порядка определяется с точностью до произвольной постоянной. Аналогично первообразная F второго порядка, для которой $F''=f(x)$, определяется с точностью до многочлена первой степени вида $P_1(x)=C_0+C_1x$. Проводя индукцию по n, получим, что первообразная n-го порядка определяется с точностью до многочлена $P_{n-1}(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}$.

Отсюда следует, что первообразная n-го порядка функции f полностью определена, если заданы ее значение и значения ее $n-1$ первых производных в некоторой точке $x_0\in[a, b]$. Первообразная же $F(x)$, определяемая равенством (5.69), такова, что $F(a)=F'(a)=\ldots=F^{(n-1)}(a)=0$.

Пример 5. Найти $F(x)$ из равенства $F'''(x)=e^{-x}+1$ при условии, что $F(0)=1$; $F'(0)=2$; $F''(0)=0$.

□ По формуле (5.69) имеем

$$F(x)=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}(e^{-x_3}+1)\,dx_3+C_0+C_1x+C_2x^2=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}(1+x_2-$$

$$-e^{-x_2})\,dx_2+C_0+C_1x+C_2x^2=\int_0^x\left(x_1+\frac{x_1^2}{2}+e^{-x_1}-1\right)dx_1+C_0+C_1x+$$

$$+C_2x^2=1-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-e^{-x}+C_0+C_1x+C_2x^2.$$

Из условий $F(0)=1$; $F'(0)=2$; $F''(0)=0$ получаем систему уравнений относительно C_0, C_1, C_2:

$$F(0)=1=C_0;\ F'(0)=2=C_1;\ F''(0)=2C_2=0.$$

Итак, искомая функция $F(x)=2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-e^{-x}$. ■

Задачи и упражнения

1. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$; в) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

г) $\int_0^{1/2}\arcsin x\,dx$; д) $\int_0^2\operatorname{arctg}x\,dx$; е) $\int_1^e(1+\ln x)^2\,dx$.

2. Найти первообразную 4-го порядка для функции $f(x)=\sin x$.

3. Найти $F^{(6)}(x)$, если $F(x)=\frac{1}{5!}\int_0^x(x-t)^5e^{2t}dt$.

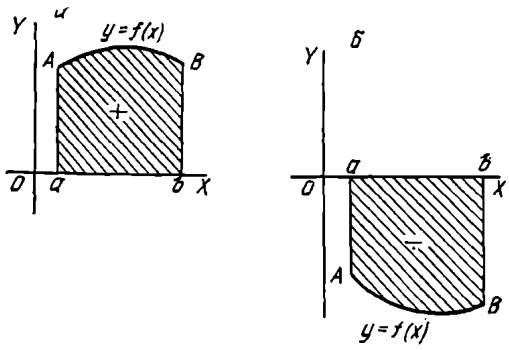


Рис. 5.6

Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат. Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что если $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$; $x = b$ и осью X, выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx, \quad (5.70)$$

причем $S \geqslant 0$ (рис. 5.6, *а*). Если $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$ (рис. 5.6, *б*), то и $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$, $a < b$. Следовательно, в этом случае

$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = -\int_a^b f(x)\,dx. \quad (5.71)$$

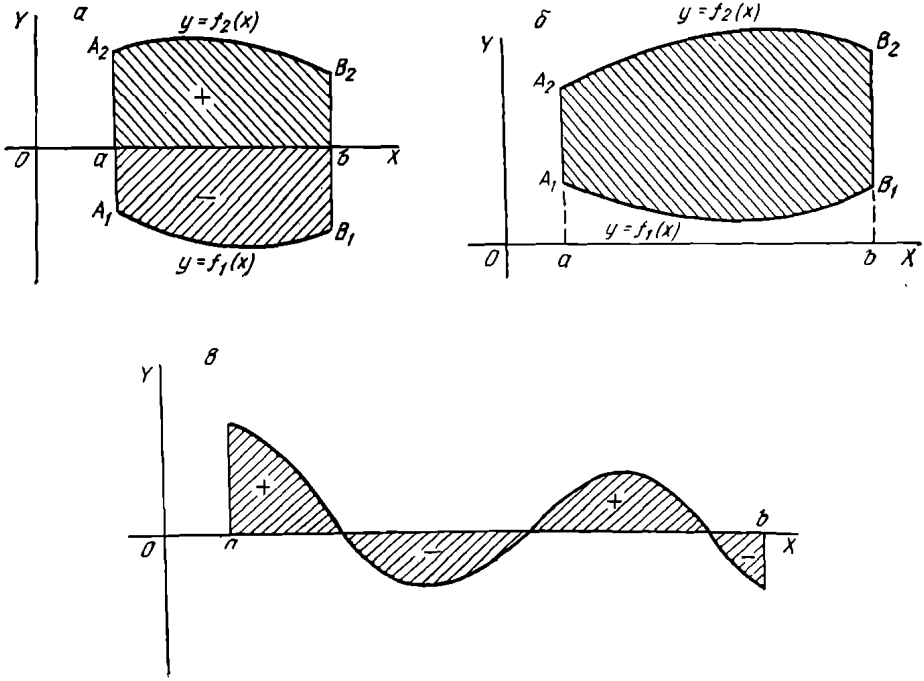


Рис. 5.7

Если криволинейная трапеция ограничена кривыми $y = f_1(x) \leqslant 0$; $y = f_2(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 5.7, *а*), то ее площадь в силу равенств (5.70) и (5.71) равна

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx + \left|\int_a^b f_1(x)\,dx\right| = \int_a^b f_2(x) - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \tag{5.72}$$

Площадь криволинейной трапеции $A_1B_1B_2A_2$ (рис. 5.7, *б*)

$$S_{A_1B_1B_2A_2} = S_{aA_2B_2b} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Если же функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$ в конечном числе точек, то интеграл (5.70) дает алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, лежащих над осью абсцисс (со знаком плюс) и под этой осью (со знаком минус) (рис. 5.7, *в*)

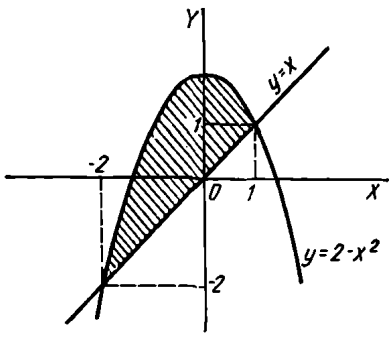


Рис. 5.8

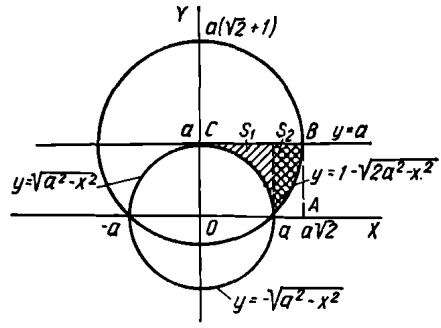


Рис. 5.9

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x) = x$ и $y = f_2(x) = 2 - x^2$.

□ Найдем абсциссы точек пересечения прямой $y = x$ с параболой $y = 2 - x^2$ (рис. 5.8). Решая систему

$$\begin{cases} y = x; \\ y = 2 - x^2, \end{cases}$$

получим $x_1 = a = -2$; $x_2 = b = 1$. Тогда

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \frac{9}{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ и прямой $y = a$.

□ Искомая фигура на рис. 5.9 заштрихована. Ее площадь $S = S_1 + S_2$, где S_1 — площадь фигуры, ограниченной кривой $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$, прямыми $y_2 = a$ и

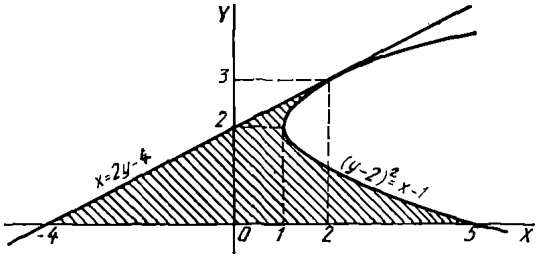


Рис. 5.10

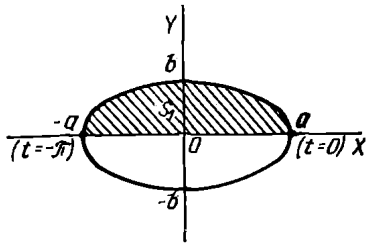


Рис. 5.11

$x=a$; S_2 — площадь фигуры, ограниченной дугой полуокружности $y_1=1-\sqrt{2a^2-x^2}$, прямыми $y_2=a$ и $x=a$. Тогда

$$S_1=\int_0^a (y_2-y_1)\,dx=\int_0^a \left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=a^2-\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

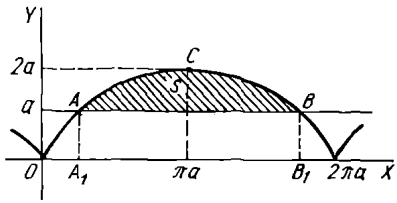


Рис. 5.12

Вычислив этот интеграл заменой $x=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, получим $S_1=a^2-\frac{\pi a^2}{4}$. Далее

$$S_2=\int_a^{a\sqrt{2}} (y_2-y_1)\,dx=$$

$$=\int_a^{a\sqrt{2}} \left(a-1+\sqrt{2a^2-x^2}\right)dx.$$

Вычислив интеграл заменой $x=a\sqrt{2}\sin t$, $\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, найдем, что $S_2=\frac{\pi a^2}{4}$. Искомая площадь $S=S_1+S_2=a^2$.

Отметим, что в данном случае задачу можно решить проще, если учесть, что искомая площадь равна площади S' прямоугольника $OABC$, из которой надо вычесть площадь S'' четверти круга и площадь S''' криволинейной трапеции DAB, ограниченной кривой $y=1-\sqrt{2a^2-x^2}$, прямыми $y=0$ и $x=a\sqrt{2}$, причем

$$S'=a^2\sqrt{2};\quad S''=\frac{\pi a^2}{4};\quad S'''=\int_a^{a\sqrt{2}} \left(1-\sqrt{2a^2-x^2}\right)dx=a^2\sqrt{2}-a^2-\frac{\pi a^2}{4}.$$

Тогда

$$S=S'-S''-S'''=a^2\sqrt{2}-\frac{\pi a^2}{4}-a^2\sqrt{2}+a^2+\frac{\pi a^2}{4}=a^2. \blacksquare$$

Часто бывает удобным использовать для вычисления площадей фигур формулы, в которых интегрирование ведется по переменной y. При этом x считается функцией y, т. е.

$$S=\int_c^d [f_2(y)-f_1(y)]\,dy,\quad c<d. \tag{5.73}$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2 = x - 1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0 = 3$ и осью X (рис. 5.10).

□ Будем рассматривать фигуру относительно оси Y, тогда удобно применить формулу (5.73). Запишем уравнение параболы в виде $x = y^2 - 4y + 5$. Уравнение касательной к параболе имеет вид $x - x_0 = x'_y(y_0)(y - y_0)$, где $x_0 = x(3) = 2$. Так как $x'_y = 2y - 4$, то $x'_y(y_0) = x'_y(3) = 2$. В итоге уравнение касательной имеет вид $x = 2y - 4 = f_1(y)$. По формуле (5.73) находим

$$S = \int_0^3 [(y^2 - 4y + 5) - (2y - 4)]\,dy = \int_0^3 (y-3)^2\,dy = 9. \blacksquare$$

Если верхняя (нижняя) граница криволинейной трапеции (см. рис. 5.6) задана в параметрическом виде уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t); \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

то, положив в формуле (5.70) $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)$, получим $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Следовательно, в этом случае площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.74}$$

Пример 4. Найти площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.75}$$

□ Запишем уравнение эллипса (5.75) в параметрическом виде, положив

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t; \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi \tag{5.76}$$

(координаты точки $M = (x, y)$, определяемые равенствами (5.76), удовлетворяют уравнению (5.75)). Тогда по формуле (5.74) находим (рис. 5.11)

$$S = 2S_1 = \int_{-a}^{a} y\,dx = -2\int_{\pi}^{0} ab\sin^2 t\,dt = -ab\int_{\pi}^{0}(1 - \cos 2t)\,dt =$$

$$= -ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{0} = \pi ab.$$

Итак, площадь эллипса с полуосями a и b равна πab. ■

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной *циклоидой*

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t); \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \tag{5.77}$$

и прямой $y = a$ $(y \geqslant a > 0)$.

□ Искомая фигура ABC изображена на рис. 5.12. Для отыскания пределов интегрирования по t решим систему

$$\left.\begin{aligned} y &= a(1 - \cos t); \\ y &\geqslant a \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\cos t \leqslant 0) \Rightarrow \left\{t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]\right\}.$$

Тогда площадь S_1 фигуры A_1B_1BCA выражается интегралом

$$S_1 = a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1 - \cos t)^2\,dt = a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left(4 + \frac{3}{2}\pi\right).$$

Искомая площадь S найдется как разность площади S_1 и площади прямоугольника A_1B_1BA, равной $a^2(2+\pi)$, так как, согласно равенствам (5.77), $A = \left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right), 0\right)$; $B = \left(a\left(\frac{3}{2}\pi+1\right), 0\right)$.

Таким образом, $S = a^2\left(4+\frac{3}{2}\pi\right) - a^2(2+\pi) = a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$. ■

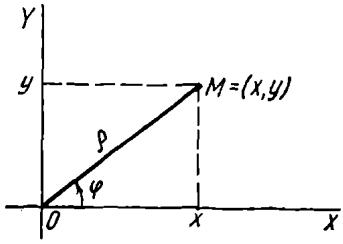


Рис. 5.13

Полярная система координат. Одной из важных систем координат на плоскости является *полярная система координат* — совокупность точки O, называемой *полюсом*, и проходящего через него луча OL, называемого *полярной осью*, с выбранной единицей масштаба для измерения длин отрезков. Тогда положение любой точки M на плоскости определяется двумя числами ρ и φ, где $\rho = |OM|$ — расстояние от точки M до полюса O, а φ — угол между полярной осью OL и вектором $\mathbf{OM}$, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось OL для совмещения с вектором $\mathbf{OM}$ (рис. 5.13). Числа ρ и φ называются соответственно *полярным радиусом и полярным углом*. Точку M с полярными координатами ρ и φ будем обозначать $M = (\rho, \varphi)$.

Из самого смысла ρ и φ следует, что $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Иногда полагают $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Очевидно, что $M = (\rho, \varphi) = (\rho, \varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке, будем считать отрицательными. Для полюса O радиус $\rho = 0$, а угол φ не определен.

Установим связь между полярными и прямоугольными координатами точки M. Для этого совместим эти системы координат (рис. 5.13). Тогда очевидно, что

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{5.78}$$

Формулы (5.78) выражают прямоугольные координаты точки через полярные. Из равенства (5.78) получаем формулы

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{5.79}$$

выражающие полярные координаты точки через прямоугольные.

Пример 6. Найти полярные координаты точки $M = (-1, -\sqrt{3})$.

□ По формулам (5.79) находим, что

$$\rho = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}; \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

т. е. $\varphi = \frac{4}{3}\pi$. Итак, в полярной системе координат $M = \left(2, \frac{4}{3}\pi\right)$. ■

Из соотношений (5.79) имеем $x^2 + y^2 = \rho^2$. Это равенство позволяет упростить уравнения некоторых кривых в полярной системе

координат. Так, например, окружность $x^2 + y^2 = a^2$ в полярной системе координат запишется в виде $\rho = a$.

Пример 7. Записать в полярной системе координат уравнения окружностей $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

□ Имеем $(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$. Отсюда, учитывая равенства (5.78), получаем, что уравнение окружности $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ (рис. 5.14, *а*) в полярных координатах имеет вид $\rho = 2a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Аналогично получается, что уравнение окружности $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ (рис. 5.14, *б*) в полярных координатах имеет вид $\rho = 2a\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. ■

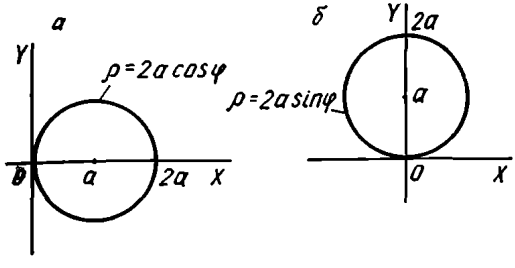


Рис. 5.14

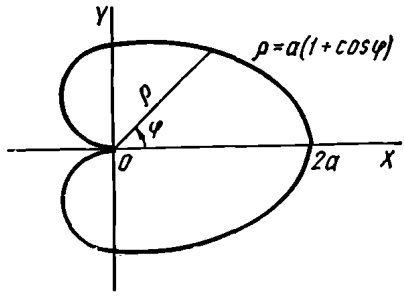


Рис. 5.15

Пример 8. Записать в декартовых координатах уравнение кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a > 0$.

□ Учитывая равенства (5.79), имеем

$$\sqrt{x^2+y^2} = a\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

откуда после несложных преобразований получаем уравнение кардиоиды (рис. 5.15) в декартовой системе координат в виде

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2y^2 = 0. \blacksquare$$

Площадь плоской фигуры в полярных координатах. Найдем площадь *криволинейного сектора*, ограниченного непрерывной кривой AB, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi) \geqslant 0$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис. 5.16).

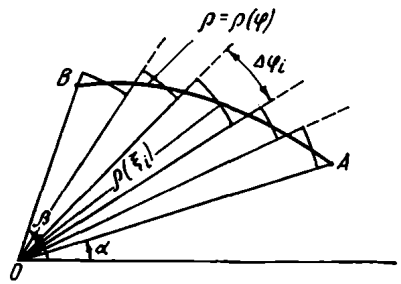


Рис. 5.16

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$ и выберем на каждом отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ произвольную точку ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, что соответствует выбору луча $\varphi = \xi_i$. Построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$, площадь каждого из которых равна $\Delta s_i = \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i$.

В результате получим фигуру, площадь которой равна сумме

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i, \quad \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Эта сумма является, очевидно, интегральной суммой для функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. В пределе при $\Delta = \max\{\Delta\varphi_i\} \to 0$ получим искомую площадь криволинейного сектора

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi. \tag{5.80}$$

Пример 9. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $\rho^2 = a(1 + \cos\varphi)$ (см. рис. 5.15).

□ По формуле (5.50) находим

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2. \blacksquare$$

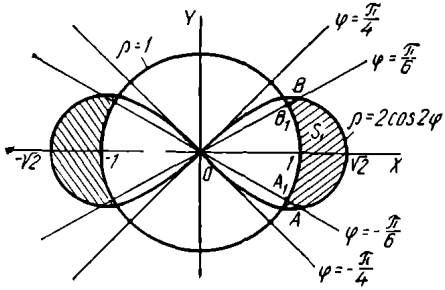


Рис. 5.17

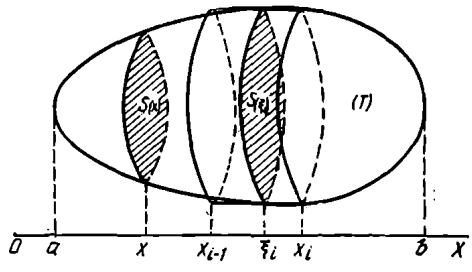


Рис. 5.18

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ и окружностью $\rho = 1$ $(\rho \geqslant 1)$ (рис. 5.17).

□ Найдем пределы интегрирования по φ. Для этого решим систему

$$\left.\begin{array}{l}\rho^2 = 2\cos 2\varphi;\\ \rho \geqslant 1\end{array}\right\} \Rightarrow \cos 2\varphi \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

Искомую площадь S найдем как удвоенную площадь S_1, равную разности площадей секторов OAB и OA_1B_1:

$$S = 2S_1 = 2\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} 2\cos 2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1\,d\varphi\right] = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \blacksquare$$

Вычисление объемов тел. Пусть для тела T известна площадь его сечения $S = S(x)$ плоскостями, перпендикулярными к оси X (рис. 5.18). Предположим, что $S(x)$ — непрерывная функция для всех $x \in [a, b]$. Проведем плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, ..., $x = x_n = b$, которые разбивают тело на слои. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем

произвольно точку ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и построим цилиндрическое тело T_i с образующей, параллельной оси X, и направляющей, представляющей собой контур сечения $x = \xi_i$ с площадью $S(\xi_i)$. Объем такого цилиндрического тела T_i равен $\Delta V_i = S(\xi_i)\,\Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда объем всего тела приближенно равен сумме

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

которая, очевидно, является интегральной суммой для функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$. Переходя к пределу при $\Delta = \max|\Delta x_i| \to 0$, получим точное значение искомого объема V тела T в виде интеграла

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{5.81}$$

Пример 11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2,\ z = h.$$

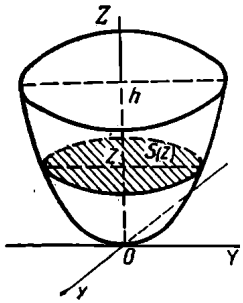


Рис. 5.19

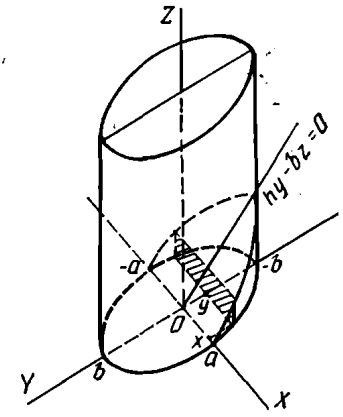


Рис. 5.20

□ Если эллиптический параболоид $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ (рис. 5.19) пересечь плоскостью $z = \text{const}$, то в его сечении получим эллипс

$$\frac{x^2}{z/2} + \frac{y^2}{2z/9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{z/2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2z/9})^2} = 1$$

с полуосями $a = \sqrt{z/2}$ и $b = \sqrt{2z/9}$, площадь которого равна

$$S = S(z) = \pi ab = \pi\sqrt{z/2}\cdot\sqrt{2z/9} = \pi z/3,\ 0 \leqslant z \leqslant h.$$

По формуле (5.81) объем искомого тела

$$V = \int_0^h \frac{\pi z}{3}\,dz = \frac{\pi z^2}{6}\Big|_0^h = \frac{\pi h^2}{6}.$$ ■

Пример 12. Найти объем части цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $hy-bz=0$.

□ Плоскость $hy-bz=0$ проходит через ось X и прямую $hy-bz=0$, лежащую в плоскости YZ (рис. 5.20). При $y=\pm b$ из уравнения $hy-bz=0$ получаем $z=\pm h$. Пересекая полученное тело плоскостью $y=\text{const}$, $0\leqslant y\leqslant b$, в сечении получаем прямоугольник с основанием, параллельным оси X, и высотой, параллельной оси Z. Длина основания l прямоугольника при данном y вычисляется из уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, т. е. $l=2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$. Высоту прямоугольника найдем из уравнения плоскости $hy-bz=0$. Она равна $z=hy/b$. Тогда площадь сечения $S=S(y)=\frac{2ah}{b}y\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$. В таком случае искомый объем

$$V=\int_0^b S(y)\,dy=\int_0^b\frac{2ah}{b}y\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{2ah}{b}\int_0^b y\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=$$

$$=-\frac{2ah}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\int_0^b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,d\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=-\frac{2abh}{3}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^b=\frac{2}{3}abh.$$ ■

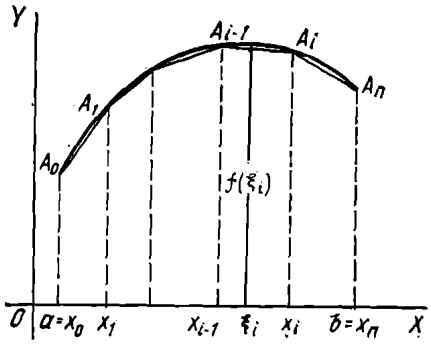


Рис. 5.21

Предположим, что тело T получено вращением некоторой кривой $y=f(x)$, $x\in[a,\ b]$, вокруг оси X. Если это тело пересечь плоскостью, перпендикулярной к оси X, то в сечении получится круг, радиус которого равен $|f(x)|$. Следовательно, площадь сечения $S(x)=\pi f^2(x)$. В результате, согласно формуле (5.81), *объем тела вращения* определяется равенством

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (5.82)$$

Если же кривая $y=f(x)$, $x\in[a,\ b]$, задана в параметрическом виде $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\ \beta]$, то из формулы (5.82) получим

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (5.83)$$

Площадь поверхности вращения. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ определена неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Требуется найти площадь поверхности, образованной вращением ее графика вокруг, например, оси X.

Возьмем некоторое разбиение $a=x_0<x_1<\ \ldots\ <x_n=b$ отрезка $[a,\ b]$. Проведем ломаную линию с вершинами в точках

$$A_0=(x_0,\ f(x_0)),\ A_1=(x_1,\ f(x_1)),\ \ldots,\ A_n=(x_n,\ f(x_n)),$$

принадлежащих графику функции (рис. 5.21). Длина i-го звена этой

ной, $i = 1, 2, \ldots, n$, равна $l_i = |A_{i-1}A_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \ldots} \to$
$\to \sqrt{+ (f(x_i) - f(x_{i-1})^2)}$.

По теореме Лагранжа о среднем имеем

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

При вращении i-го звена ломаной линии вокруг оси X образуется боковая поверхность усеченного конуса с радиусами оснований $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ и образующей $l_i = |A_{i-1}A_i|$. Так как площадь боковой поверхности каждого такого конуса есть

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i, \tag{5.84}$$

то площадь поверхности, образованной вращением ломаной, будет равна сумме

$$\sigma_n^* = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i. \tag{5.85}$$

Эта сумма не является интегральной суммой для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$, так как в каждом слагаемом суммы (5.85) фигурирует несколько точек из одного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$: точки x_{i-1}, x_i, ξ_i.

Покажем, что предел суммы (5.85) при $\Delta \to 0$ равен пределу суммы

$$\sigma_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

являющейся интегральной для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ на $[a, b]$.

Действительно, представим σ_n^* в виде

$$\sigma_n^* = \sigma_n + \pi \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(f(x_{i-1} - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i))] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \right\}. \tag{5.86}$$

Покажем, что при $\Delta \to 0$ выражение в фигурных скобках стремится к нулю. В самом деле, в силу равномерной непрерывности функции f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $\Delta < \delta$ выполнено неравенство $|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ и $|f(x_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$, где $M = \max\limits_{[a, b]} \sqrt{1 + f'^2(x)}$. Тогда

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i))] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \right\} \right| <$$

$$< 2 \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Отсюда и из равенства (5.86) следует, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma_n^* = \lim_{\Delta\to 0}\sigma_n = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

т. е. искомая площадь поверхности вращения

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{5.87}$$

Если же график функции вращается вокруг оси Y, то нужно из равенства $y=f(x)$ выразить x в виде функции y, т. е. $x=g(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$. Тогда формула (5.87) приобретает вид

$$P = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+g'^2(x)}\,dy.$$

При параметрическом задании функции $y=f(x)$ в виде $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, из формулы (5.87) в силу того, что $f'(x)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, получим

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{5.88}$$

Если же кривая задана в полярных координатах равенством $\rho=\rho(\varphi)$, то, согласно формуле (5.78), ее уравнение можно записать в параметрическом виде

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi;\quad y=\rho(\varphi)\sin\varphi,\quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,$$

где роль параметра t играет φ. Тогда формула (5.88) принимает вид

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}\,d\varphi. \tag{5.89}$$

Пример 13. Вычислить площадь поверхности шара радиуса R.

□ Искомая поверхность получается вращением дуги полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\leqslant x\leqslant R$, вокруг оси X. Так как $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то по формуле (5.87) получаем

$$P = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi R\int_{-R}^{R}dx = 4\pi R^2. \blacksquare$$

Пример 14. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением циклоиды $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, вокруг оси X.

□ По формуле (5.88) имеем

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{1+\frac{a^2\sin^2 t}{a^2(1-\cos t)^2}}\,a(1-\cos t)\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}dt = \frac{64}{3}\pi a^2. \blacksquare$$

Задачи и упражнения

1. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

а) $\begin{cases} y = (x-1)^2; \\ y^2 = x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 4 - (y-1)^2; \\ x = y^2 - 4y + 3. \end{cases}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически:

а) $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 8\sin t; \\ y = 4\sqrt{3} \quad (x \geqslant 4\sqrt{3}); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t; \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t; \\ x = 2 \quad (x \geqslant 2). \end{cases}$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярной системе координат:

а) $\begin{cases} \rho = 4\sin 3\varphi; \\ \rho = 2 \quad (\rho \geqslant 2); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right); \\ \rho = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right); \\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

4. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{64} = -1; \\ z = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{16} = 1; \\ z = y\sqrt{3}; \\ z = 0, \ (z \geqslant 0). \end{cases}$

5. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций:

а) $\begin{cases} y = 1 - x^2, \ x = 0; \\ x = \sqrt{y^2 - 2}, \ x = 1; \end{cases}$ (ось вращения X)

б) $\begin{cases} y = \arccos\dfrac{x}{5}; \\ y = \arccos\dfrac{x}{3}; \\ y = 0 \end{cases}$ (ось вращения Y).

6. Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

а) астроиды $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$, вокруг оси X;

б) кривой $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $|x| \leqslant b$, вокруг оси X;

в) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

5.8. ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Интеграл от вектор-функции. Пусть

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} — \tag{5.90}$$

вектор-функция, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$. Определим интеграл от нее следующим образом:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}(\xi_i)\,\Delta t_i = \left(\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\,\Delta t_i,\ \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}y(\xi_i)\,\Delta t_i,\right.$$
$$\left.\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\,\Delta t_i,\right) \tag{5.91}$$

где $t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i$; $\Delta = \max\{\Delta t_i\}$; t_i — точки разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$.

Отсюда следует, что

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_\alpha^\beta x(t)\,dt,\ \int_\alpha^\beta y(t)\,dt,\ \int_\alpha^\beta z(t)\,dt\right) = \mathbf{i}\int_\alpha^\beta x(t)\,dt + \mathbf{j}\int_\alpha^\beta y(t)\,dt + \mathbf{k}\int_\alpha^\beta z(t)\,dt. \tag{5.92}$$

Если $\mathbf{r}(t)$ — дифференцируемая функция, то, как известно, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))$. Отсюда и из равенства (5.92) следует, что если $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ являются первообразными для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ на $[\alpha, \beta]$, то функция $\mathbf{F}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ есть первообразная для $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ на $[\alpha, \beta]$ и имеет место равенство

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{F}\Big|_\alpha^\beta = (X(\beta), Y(\beta), Z(\beta)) - (X(\alpha), Y(\alpha), Z(\alpha)). \tag{5.93}$$

Для интеграла от вектор-функции справедлива оценка по модулю

$$\left|\int_\alpha^\beta \mathbf{r}(t)\,dt\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |\mathbf{r}(t)|\,dt, \tag{5.94}$$

что следует из равенства (5.91) и неравенства треугольника:

$$\left|\int_\alpha^\beta \mathbf{r}(t)\,dt\right| = \left|\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n \mathbf{r}(\xi_i)\,\Delta t_i\right| \leqslant \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(\xi_i)|\,\Delta t_i = \int_\alpha^\beta |\mathbf{r}(t)|\,dt.$$

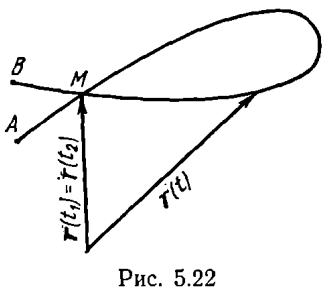


Рис. 5.22

Основные понятия, связанные с кривой. *Путем* в пространстве $\mathbf{R}^3$ называется взаимно однозначное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ в $\mathbf{R}^3$, задаваемое непрерывными на $[\alpha, \beta]$ функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Обозначим $I = [\alpha, \beta]$. Тогда путь есть отображение $\Gamma\colon I \to \mathbf{R}^3$. Путь называется *гладким*, если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$. Переменная t называется *параметром*, а сам путь $\Gamma\colon I \to \mathbf{R}^3$ — *параметризованным*.

Если $\Gamma\colon I \to \mathbf{R}^3$ — путь, определяемый функцией (5.90), то точки $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ пространства $\mathbf{R}^3$ называются *началом* и *концом пути* соответственно (рис. 5.22). Путь называется *замкнутым*, если его начальная точка A совпадает с конечной точкой B. Если же при некоторых значениях $t_1 \neq t_2$ выполняется равенство $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, то точка M пути, для которой $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, называется *точкой самопересечения* (рис. 5.22). Замкнутый путь без точек самопересечения называется *контуром*.

Напомним, что образом $\Gamma(I)$ пути $\Gamma\colon I \to \mathbf{R}^3$ является *годограф*.

Один и тот же путь может быть описан с помощью различных параметризаций. Убедимся в этом на примере.

Пример 1. Рассмотрим верхнюю полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$. Пусть $t \in [-1, 1]$ и $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$. Тогда функция Γ: $[-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, где Γ есть отображение $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, определяет на плоскости путь (верхнюю полуокружность), причем началом служит точка $A = (-1, 0)$, а концом — точка $B = (1, 0)$ (рис. 5.23). Этот же путь можно описать и функцией $\mathbf{r}_2(t) = (-\cos t, \sin t)$, где $t \in [0, \pi]$.

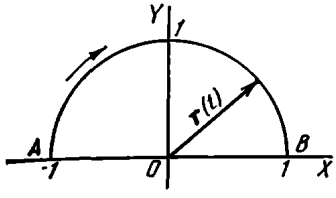


Рис. 5.23

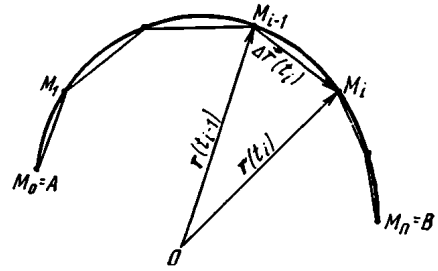


Рис. 5.24

Аналогично вводится понятие пути и в пространстве $\mathbf{R}^n$ как отображения Γ: $I \to \mathbf{R}^n$, задаваемого непрерывными функциями $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Длина дуги кривой. Пусть кривая в пространстве описывается вектор-функцией (5.90), где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $t \in [\alpha, \beta]$. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta$ на n произвольных частей. Такому разбиению отрезка $[\alpha, \beta]$ отвечает разбиение кривой AB на элементарные дуги точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$ (рис. 5.24). В кривую AB впишем ломаную линию с вершинами в указанных точках. Тогда длина i-го звена ломаной определяется равенством

$$\Delta S_i = |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2},$$

а длина всей ломаной равна сумме

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

За длину S дуги кривой AB принимается предел длины вписанной в нее ломаной при условии, что $\max\{\Delta s_i\} \to 0$, что равносильно стремлению к нулю $\Delta = \max\{\Delta t_i\}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, в силу равномерной непрерывности функции $\mathbf{r}(t)$ на $[\alpha, \beta]$.

Таким образом, длина кривой

$$S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}.$$

Если кривая задана уравнениями $x = x(x)$; $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, на плоскости, то ее длина, согласно формуле (5.95), выражается равенством

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt. \tag{5.97}$$

Если же плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$; $x \in [a, b]$, то, положив $x = t$; $y = f(x) = f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, из формулы (5.95) получим, что ее длина

$$S = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{5.98}$$

Если кривая задана в полярной системе координат равенством $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то по формулам (5.78) можно перейти к параметрическому заданию ее в виде

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi;\ y = \rho(\varphi)\sin(\varphi), \tag{5.99}$$

где роль параметра t играет φ. Подставив соотношения (5.99) в равенство (5.95), получим формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной в полярных координатах:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \tag{5.100}$$

Дифференциал длины дуги. Выражение $|\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$, стоящее под знаком интеграла в формуле (5.95), обозначается ds и называется *дифференциалом длины дуги* кривой. Таким образом, при параметрическом задании кривой

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt = |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt. \tag{5.101}$$

Если кривая задана в виде $y = f(x)$, то, согласно формуле (5.98), имеем

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{5.102}$$

Для кривой, заданной в полярных координатах, имеем, согласно формуле (5.100), что

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \tag{5.103}$$

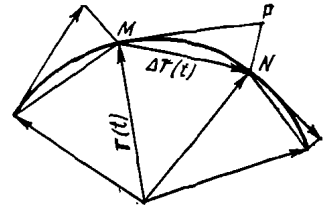


Рис. 5.25

Выясним смысл дифференциала длины дуги кривой.

Пусть $M = (x(t), y(t), z(t))$ — произвольная точка на гладкой кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (рис. 5.25). Составим параметрические уравнения касательной к этой кривой в точке M. Согласно соотношениям (1.49) и (4.6), координаты x, y, z любой точки P касательной определяются равенствами:

$$x = x(t) + \dot{x}(t)\,\Delta t;\ y = y(t) + \dot{y}(t)\,\Delta t;\ z = z(t) + \dot{z}(t)\,\Delta t. \tag{5.104}$$

Тогда длина отрезка MP касательной равна

$$\Delta l = |MP| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\Delta t = |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\Delta t \qquad (5.105)$$

в силу равенства (5.101).

Сравнивая формулы (5.101) и (5.105), приходим к выводу, что *дифференциал длины дуги кривой равен длине отрезка касательной к этой кривой, отвечающего приращению параметра* Δt.

При достаточно малом Δt_i длина отрезка касательной приближенно может считаться равной длине дуги кривой Δs_i, отвечающей этому приращению Δt_i, т. е.

$$\Delta s_i \cong |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\,\Delta t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Просуммировав эти равенства по i, получим, что длина дуги приближенно равна

$$S \cong \sum_{i=1}^{n} |\dot{\mathbf{r}}(t_i)|\,\Delta t_i = \sigma_n.$$

Отсюда в пределе при $\Delta = \max\{\Delta t_i\} \to 0$ снова получим формулу (5.95).

Заметим, что выражение (5.101) для дифференциала длины дуги кривой можно записать в виде

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad (5.106)$$

так как $dx = \dot{x}(t)\,dt$; $dy = \dot{y}(t)\,dt$; $dz = \dot{z}(t)\,dt$.

Пример 2. Найти длину дуги одного витка винтовой линии

$$x = a\cos t;\ y = a\sin t;\ z = ht,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

□ Имеем $\dot{x}(t) = -a\sin t$; $\dot{y}(t) = a\cos t$; $\dot{z}(t) = h$. По формуле (5.95) получаем

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + h^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + h^2}. \ \blacksquare$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\,dt$, $1 \leqslant x \leqslant 3$.

□ Так как $y'_x = \sqrt{x^2 - 1}$, то по формуле (5.98) находим

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + x^2 - 1}\,dx = \int_1^3 x\,dx = 4. \ \blacksquare$$

Пример 4. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 1 + \sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

□ Так как $\rho' = \cos\varphi$, то по формуле (5.100) имеем

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\varphi + (1 + \sin\varphi)^2}\,d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}. \ \blacksquare$$

Кривизна плоской кривой. Одной из важных характеристик кривой является ее кривизна.

Проведем к кривой $y = f(x)$ в точке $M = (x, y)$ касательную и обозначим через α угол между касательной и положительным направлением оси X (рис. 5.26). Этот угол можно рассматривать как функцию длины дуги s, играющей роль параметра, т. е. $\alpha = \alpha(s)$, где $0 \leqslant s \leqslant S$; S — длина всей дуги кривой.

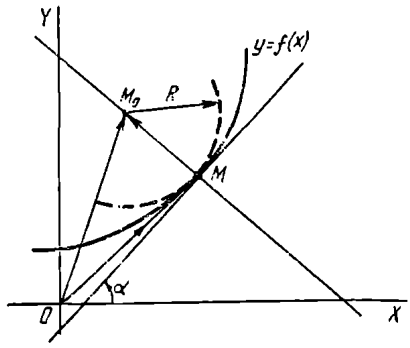


Рис. 5.26

Предел

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|, \tag{5.107}$$

если он существует, называется *кривизной кривой* в точке M.

Так как $\operatorname{tg} \alpha = y'$, т. е. $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, то в силу равенства (5.102)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dy'} \cdot \frac{dy'}{ds} = \frac{1}{1+y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{1+y'^2} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} =$$

$$= \frac{y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}.$$

Таким образом, окончательно, кривизна кривой равна

$$k = |d\alpha/ds| = |y''|/\sqrt{(1+y'^2)^3}. \tag{5.108}$$

Пусть кривая задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Учитывая, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ и $y''_{xx} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$, из равенства (5.108) получим следующую формулу для вычисления кривизны:

$$k = |\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|/\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}. \tag{5.109}$$

Величину

$$R = 1/k \tag{5.110}$$

называют *радиусом кривизны* кривой в рассматриваемой точке M.

Так, например, радиус кривизны окружности $x = a\cos t$; $y = a\sin t$, вычисленный по формуле (5.110), $R = a$.

Точка M_0, лежащая на нормали к кривой, проведенной в точке M на расстоянии $R = 1/k$ от M в сторону вогнутости кривой (рис. 5.26), называется *центром кривизны* кривой в точке M, а сам круг радиуса $R = 1/k$ с центром в точке M_0 — *кругом кривизны*.

Эволюта и эвольвента кривой. *Эволютой кривой* называется геометрическое место центров кривизны этой кривой. Для вывода уравнения эволюты обратимся к рис. 5.26, из которого следует, что $\mathbf{OM}_0 = \mathbf{OM} + \mathbf{MM}_0$. Но $\mathbf{OM}$ — радиус-вектор $\mathbf{r}$ текущей точки M кри-

вой, $\mathbf{OM}_0 = \mathbf{r}_1 = (\xi, \eta)$ — радиус-вектор центра кривизны M_0 текущей точки эволюты, $\mathbf{MM}_0 = R\mathbf{n}^0$, где $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор нормали. Таким образом, векторное уравнение эволюты имеет вид

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + R\mathbf{n}^0. \tag{5.111}$$

Получим уравнение эволюты в координатной форме. Если кривая задана векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, то единичный вектор касательной в точке M имеет вид

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{\dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j}}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} = \frac{\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \tag{5.112}$$

Единичный вектор нормали можно найти из следующих соображений. Так как $(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = \vec{\tau}^2 = 1$, то отсюда, продифференцировав это равенство по t, получим $2\left(\dot{\vec{\tau}}, \vec{\tau}\right) = 0$, откуда следует, что $\dot{\vec{\tau}} \perp \vec{\tau}$. Найдем $\dot{\vec{\tau}}$ дифференцированием равенства (5.112):

$$\dot{\vec{\tau}} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right)'_t \mathbf{i} + \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right)'_t \mathbf{j} = -\dot{y}\,\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}\mathbf{i} + \\ + \dot{x}\,\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}\mathbf{j} = -\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}(\dot{y}\mathbf{i} - \dot{x}\mathbf{j}),$$

откуда

$$\left|\dot{\vec{\tau}}\right| = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

согласно равенству (5.109). Тогда единичный вектор нормали

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{\left|\dot{\vec{\tau}}\right|} = -\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}(\dot{y}\mathbf{i} - \dot{x}\mathbf{j}).$$

Подставив $\mathbf{n}^\circ$, $R = \frac{1}{k}$ и $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ в равенство (5.111), получим

$$\xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{k^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}(\dot{y}\mathbf{i} - \dot{x}\mathbf{j}).$$

Отсюда с учетом равенства (5.109) окончательно имеем

$$\xi = x - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}};\quad \eta = y + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}. \tag{5.113}$$

Если t пробегает свой промежуток $[\alpha, \beta]$, то центр кривизны (ξ, η) описывает кривую — эволюту данной кривой, т. е. равенства (5.113) *являются параметрическими уравнениями эволюты.* Сама же кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, в этом случае называется *эвольвентой.*

Пример 5. Найти эволюту эллипса $x = a\cos t$; $y = b\sin t$, $a \geqslant b > 0$.

□ По формуле (5.113) получаем

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t;\ \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\times$$

$\times \sin^3 t$ — параметрические уравнения кривой, называемой *астроидой* (рис. 5.27). ■

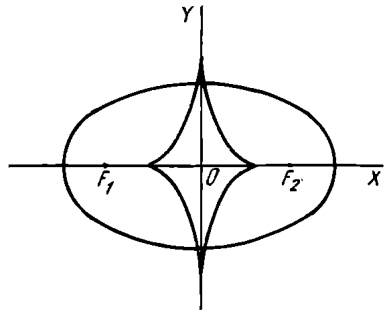


Рис. 5.27

Кривизна пространственной кривой. Формулы Френе. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ кривая L задана векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Напомним, что вектор касательной к кривой в данной точке есть $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}$, а орт его имеет вид $\vec{\tau} = \dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|$.

Выберем теперь в качестве параметра кривой ее длину дуги s, $0 \leqslant s \leqslant S$, где S — длина всей кривой. Тогда из определения дифференциала длины дуги (формула (5.101)) вытекает, что $|d\mathbf{r}/ds| = 1$, так как $t = s$, т. е. *модуль производной радиус-вектора текущей точки линии по ее дуге равен единице.* Но вектор $d\mathbf{r}/ds$ всегда направлен по касательной к кривой в сторону возрастания параметра. Отсюда следует, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \vec{\tau} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}, \tag{5.114}$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной.

Таким образом, *производная радиус-вектора* $\mathbf{r}$ *текущей точки кривой по ее дуге* s *равна орту касательной* $\vec{\tau}$ *в этой точке* (рис. 5.28).

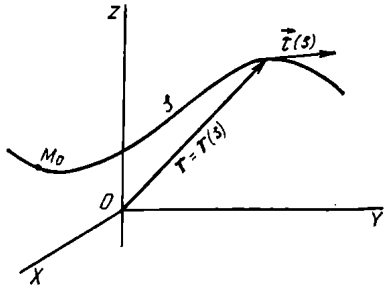


Рис. 5.28

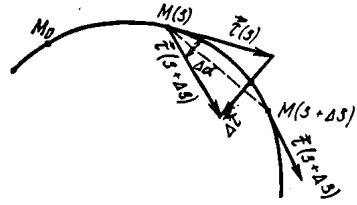


Рис. 5.29

Поскольку $\vec{\tau}$ — единичный вектор, то, как показано выше, вектор $d\vec{\tau}/ds$ перпендикулярен к нему, т. е. $d\vec{\tau}/ds$ есть вектор нормали к кривой, а значит,

$$d\vec{\tau}/ds = c\mathbf{n}^\circ, \tag{5.115}$$

где $\mathbf{n}^\circ$ — единичный вектор нормали к кривой; c — некоторый коэффициент.

Выясним геометрический смысл коэффициента c. Пусть в точках $M(s)$ и $M(s+\Delta s)$ кривой проведены единичные орты касательных $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\tau}(s+\Delta s)$ соответственно (рис. 5.29). Совершим параллельный перенос вектора $\vec{\tau}(s+\Delta s)$ в точку $M(s)$ и обозначим через $\Delta\alpha$ угол между векторами $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\tau}(s+\Delta s)$. В образовавшемся при этом равнобедренном треугольнике приращение $\Delta\vec{\tau}$ является основанием и его модуль определяется соотношением

$$\left|\Delta\vec{\tau}\right| = 2\sin\frac{|\Delta\alpha|}{2}.$$

Тогда

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{|\Delta\alpha|}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = k,$$

где k — кривизна кривой в заданной точке. Итак,

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = k, \tag{5.116}$$

т. е *модуль производной орта касательной по дуге равен кривизне k кривой.*

Так как векторы $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ и $\vec{\tau}$ перпендикулярны, то вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ направлен по нормали к кривой в данной точке. Векторы $\vec{\tau}$ и $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ определяют плоскость, проходящую через точку M кривой, называемую *соприкасающейся* плоскостью линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$.

Таким образом, вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ направлен по той нормали кривой, которая принадлежит соприкасающейся плоскости. Эта нормаль называется *главной нормалью кривой.* Орт главной нормали обозначается $\vec{\nu}$, т. е. $\frac{d\vec{\tau}}{ds}\Big/\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \vec{\nu}$. Отсюда с учетом равенств (5.115) и (5.116) получаем, что $c = k$, $\mathbf{n}^\circ = \vec{\nu}$, т. е.

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}. \tag{5.117}$$

Равенство (5.117) называется *первой формулой Френе*.*

Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$ называется *вектором кривизны пространственной кривой.*

* Ж. Ф. Френе (1819—1900) — французский математик.

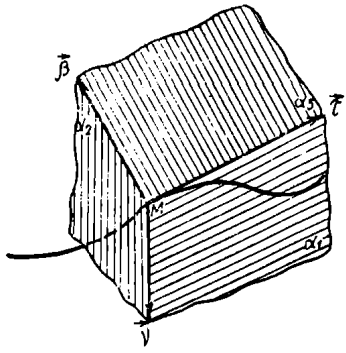


Рис. 5.30

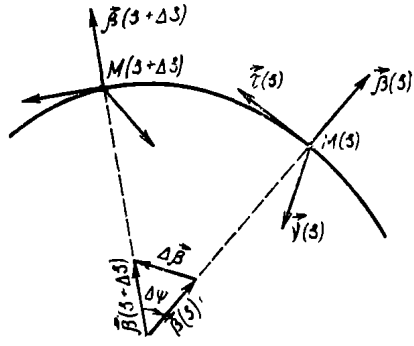


Рис. 5.31

Плоскость, перпендикулярная к орту касательной $\vec{\tau}$ в данной точке и проходящая через эту точку, называется *нормальной плоскостью.* В этой плоскости, очевидно, лежит вектор $\vec{\nu}$, определяющий главную нормаль кривой в заданной точке.

Вектор

$$\vec{\beta} = \left[\vec{\tau},\ \vec{\nu}\right], \tag{5.118}$$

лежащий в нормальной плоскости, называется ортом *бинормали* пространственной кривой в данной точке. Плоскость, определяемая векторами $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$ и проходящая через данную точку кривой, называется *спрямляющей плоскостью.*

Итак, векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ определяют три плоскости, проходящие через данную точку пространственной кривой: соприкасающуюся (α_1), нормальную (α_2) и спрямляющую (α_3) (рис. 5.30). Эти плоскости образуют *сопровождающий трехгранник* пространственной кривой.

Вектор $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}$ перпендикулярен к вектору $\vec{\beta}$, что следует из дифференцирования по s равенства $\left(\vec{\beta},\ \vec{\beta}\right) = 1$. Продифференцировав равенство (5.118), получим

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds},\ \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau},\ \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right] = \left[k\vec{\nu},\ \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau},\ \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right] = \left[\vec{\tau},\ \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right], \tag{5.119}$$

так как $\left[k\vec{\nu},\ \vec{\nu}\right] = 0$.

Итак, вектор $d\vec{\beta}/ds$ перпендикулярен к вектору $\vec{\beta}$ и, согласно равенству (5.119), перпендикулярен к вектору $\vec{\tau}$. Следовательно, вектор $d\vec{\beta}/ds$ коллинеарен вектору $\vec{\nu}$, т. е.

$$d\vec{\beta}/ds = \lambda\vec{\nu}, \tag{5.120}$$

где λ — коэффициент. Выясним его геометрический смысл.

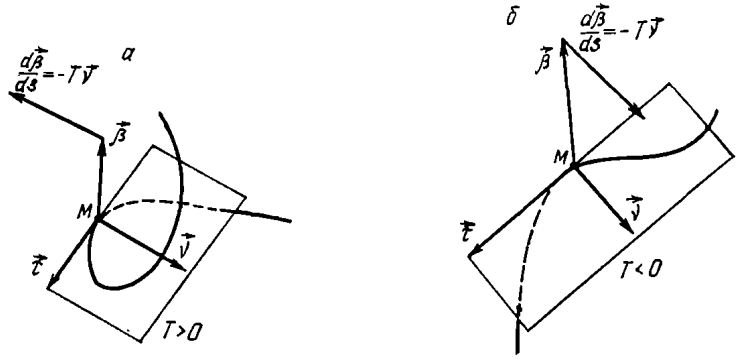


Рис. 5.32

Пусть в точках $M(s)$ и $M(s+\Delta s)$ кривой проведены орты бинормали $\vec{\beta}(s)$ и $\vec{\beta}(s+\Delta s)$ соответственно, угол между которыми обозначим $\Delta\psi$ (рис. 5.31). Тогда, рассуждая так же, как и при выяснении геометрического смысла коэффициента c в равенстве (5.111), получаем, что

$$|\lambda| = \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\beta}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|. \qquad (5.121)$$

Предел отношения угла поворота $\Delta\psi$ бинормали (соприкасающейся плоскости) при переходе из данной точки M в бесконечно близкую к ней точку кривой к длине Δs дуги, заключенной между этими точками, называется *кручением* T *кривой* в данной точке, т. е. $T = \lim\limits_{\Delta s\to 0}(\Delta\psi/\Delta s)$. Величина $\rho = 1/|T|$ называется *радиусом кручения.*

Таким образом, в силу равенства (5.121) получаем $|\lambda| = |T|$, т. е. абсолютная величина коэффициента λ равна абсолютной величине кручения T.

Выясним теперь геометрический смысл знака λ. Условимся считать кручение T положительным, если при движении вдоль кривой (по направлению $\vec{\tau}$) бинормаль поворачивается по часовой стрелке (правовинтовое движение), и отрицательным, если бинормаль поворачивается против часовой стрелки (левовинтовое движение).

Если $\lambda < 0$, то вектор $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \lambda\vec{\nu}$ направлен противоположно $\vec{\nu}$ (рис. 5.32, *а*). Это значит, что при движении в направлении $\vec{\tau}$ бинормаль поворачивается вправо. Если же $\lambda > 0$, то поворот бинормали будет левовинтовым (рис. 5.32, *б*). Отсюда получаем, что знак λ противоположен знаку кручения T, т. е. $\lambda = -T$. Итак, равенство (5.120) имеет вид

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -T\vec{\nu}. \qquad (5.122)$$

Формула (5.122) называется *второй формулой Френе.*

Так как $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, то по известному свойству векторного произведения из равенства (5.118) имеем $\vec{\nu} = \left[\vec{\beta}, \vec{\tau}\right]$.

Отсюда дифференцированием по s с учетом равенств (5.117) и (5.122) получим формулу

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\beta}}{ds}, \vec{\tau}\right] + \left[\vec{\beta}, \frac{d\vec{\tau}}{ds}\right] = -T\left[\vec{\nu}, \vec{\tau}\right] + k\left[\vec{\beta}, \vec{\nu}\right] = T\vec{\beta} - k\vec{\tau},$$

которая называется *третьей формулой Френе:*

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = T\vec{\beta} - k\vec{\tau}. \tag{5.123}$$

Таким образом, движение сопровождающего трехгранника пространственной кривой описывается следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \vec{\tau};\\ &\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu};\\ &\frac{d\vec{\nu}}{ds} = T\vec{\beta} - k\vec{\tau};\\ &\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -T\vec{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{5.124}$$

Уравнения характеристик пространственной кривой. Характеристиками пространственной кривой являются кривизна k, кручение T, касательная, главная нормаль, бинормаль, определяемые векторами $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ соответственно, а также нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая плоскости сопровождающего трехгранника этой кривой. Выведем уравнения этих характеристик.

Пусть кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тогда вектор касательной $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}$. Кроме того,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}, \tag{5.125}$$

Дифференцируя равенство (5.125) по t, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Отсюда в силу равенства (5.117) получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{\nu} + \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}. \tag{5.126}$$

Из формул (5.125) и (5.126) с учетом соотношения (5.118) имеем

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = \left[\frac{ds}{dt}\vec{\tau}, k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{\nu} + \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}\right] = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\vec{\beta}, \tag{5.127}$$

так как $\left[\vec{\tau}, \vec{\tau}\right] = \mathbf{0}$.

Равенство (5.127) показывает, что вектор $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = \mathbf{B}$ коллинеарен вектору β бинормали. Следовательно, его можно взять в качестве направляющего вектора бинормали. Отсюда в силу ортогональности векторов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{B}$ получаем, что за направляющий вектор $\mathbf{N}$ главной нормали к кривой можно взять вектор

$$\mathbf{N} = [\mathbf{B}, \mathbf{T}] = [[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], \dot{\mathbf{r}}]. \tag{5.128}$$

Итак, если кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то:

$\mathbf{T} = (T_x, T_y, T_z) = \dot{\mathbf{r}}$ — направляющий вектор касательной;

$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]$ — направляющий вектор бинормали;

$\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z) = [[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], \dot{\mathbf{r}}]$ — направляющий вектор главной нормали.

Если $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — точка на кривой, то в соответствии с формулой (1.45) уравнения

$$\frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z}; \tag{5.129}$$

$$\frac{x - x_0}{T_x} = \frac{y - y_0}{T_y} = \frac{z - z_0}{T_z}; \tag{5.130}$$

$$\frac{x - x_0}{B_x} = \frac{y - y_0}{B_y} = \frac{z - z_0}{B_z} \tag{5.131}$$

являются соответственно *каноническими уравнениями главной нормали, касательной и бинормали* к кривой, проведенными в этой точке.

Аналогично в соответствии с формулой (1.51) уравнения

$$T_x(x - x_0) + T_y(y - y_0) + T_z(z - z_0) = 0; \tag{5.132}$$

$$B_x(x - x_0) + B_y(y - y_0) + B_z(z - z_0) = 0; \tag{5.133}$$

$$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0 \tag{5.134}$$

являются соответственно *уравнениями нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей* сопровождающего трехгранника кривой.

Получим теперь формулы для кривизны и кручения пространственной кривой, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Из равенства (5.127) с учетом формулы (5.101) получаем

$$|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]| = k\left(\frac{ds}{dt}\right) = k|\dot{\mathbf{r}}|^3, \tag{5.135}$$

откуда кривизна

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \tag{5.136}$$

Для отыскания кручения T продифференцируем сначала по t равенство (5.126). Имеем

$$\dddot{\mathbf{r}} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\vec{\nu}}{dt} + \frac{dk}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{\nu} + 2k\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\vec{\nu} + \frac{d^3s}{dt^3}\vec{\tau} + \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Но так как

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = k\frac{ds}{dt}\vec{\nu};$$
$$\frac{d\vec{\nu}}{dt} = \frac{d\vec{\nu}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\left(T\vec{\beta} - k\vec{\tau}\right),$$

то выражение для $\dddot{\mathbf{r}}$ приводится к виду

$$\dddot{\mathbf{r}} = kT\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \vec{\beta} + c_1\vec{\tau} + c_2\vec{\nu}, \tag{5.137}$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные. Из равенств (5.127), (5.135) и (5.137) имеем

$$\left([\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], \dddot{\mathbf{r}}\right) = \left(k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\vec{\beta},\ kT\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\vec{\beta} + c_1\vec{\tau} + c_2\vec{\nu}\right) =$$
$$= k^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 T = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2\ T,$$

так как $\left(\vec{\beta}, \vec{\tau}\right) = \left(\vec{\beta}, \vec{\nu}\right) = 0$. Отсюда получаем формулу для кручения пространственной кривой в виде

$$T = \frac{\left([\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}], \dddot{\mathbf{r}}\right)}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2} = \frac{\left(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}\right)}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}, \tag{5.138}$$

где $\left(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}\right)$ — смешанное произведение векторов $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$.

Задачи и упражнения

1. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3/4$;
б) $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leqslant x \leqslant 3$;
в) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t; \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \pi$;
г) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
д) $\rho = 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 3/4$;
е) $\rho = 6\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$.

2. Найти радиус кривизны циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ в точке $t = \pi$.

3. Показать, что для кривой $\rho = \rho(\varphi)$, заданной в полярных координатах, кривизна k определяется равенством

$$k = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{\sqrt{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^3}}, \quad \dot{\rho} = \rho'_\varphi, \quad \ddot{\rho} = \rho''_{\varphi\varphi}.$$

4. Написать уравнения всех характеристик винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t \cdot \mathbf{i} + a\sin t \cdot \mathbf{j} + bt \cdot \mathbf{k}.$$

5. Составить уравнения плоскостей сопровождающего трехгранника кривой $x = t/\sqrt{2}$; $y = t\sqrt{2}$; $z = \ln\sin t$ при $t_0 = \pi/2$.

5.9. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Работа переменной силы. Пусть материальная точка движется под действием переменной силы F по гладкой кривой AB, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$. Будем считать, что сила F направлена по касательной к кривой в каждой ее точке и зависит от параметра s, т. е. $F = F(s)$, причем $F(s)$ — непрерывная функция.

Разобьем кривую AB точками $A = M_0$, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ..., $M_n = B$ на элементарные дуги длиной Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 5.33), что соответствует разбиению отрезка $[0, S]$ в виде $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{i-1} < s_i < \ldots < s_n = S$. На каждой такой дуге считаем силу F постоянной и равной $F(\xi_i)$, где ξ_i — произвольная точка отрезка $[s_{i-1}, s_i]$, $i = 1,2,\ldots, n$. Тогда элементарная работа силы $F(s)$ на участке $M_{i-1}M_i$ равна $\Delta A_i = F(\xi_i)\,\Delta s_i$, а полная работа на всей кривой AB приближенно выражается суммой $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta s_i$.

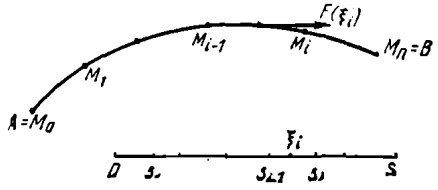


Рис. 5.33

Точное значение работы силы $F(s)$ на кривой L определяется как предел

$$A = \lim_{\Delta\to 0} \sigma_n = \int_0^S F(s)\,ds, \tag{5.139}$$

где ds — дифференциал дуги; $\Delta = \max\{\Delta s_i\}$.

Если движение точки по кривой L описывается с помощью некоторого другого параметра t, причем величина пройденного пути является непрерывно дифференцируемой функцией $s = s(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $s(\alpha) = 0$; $s(\beta) = S$, то из формулы (5.139) получим

$$A = \int_\alpha^\beta F(s(t))\,s'(t)\,dt. \tag{5.140}$$

При движении точки по отрезку $[a, b]$ оси X $(s = x)$ из равенства (5.140) имеем

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{5.141}$$

Пример 1. Найти работу, затраченную на выкачивание воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r (рис. 5.34).

□ Объем элементарного слоя воды, находящегося на глубине x и имеющего длину a, ширину $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ и толщину dx, равен $dV = amdx =$

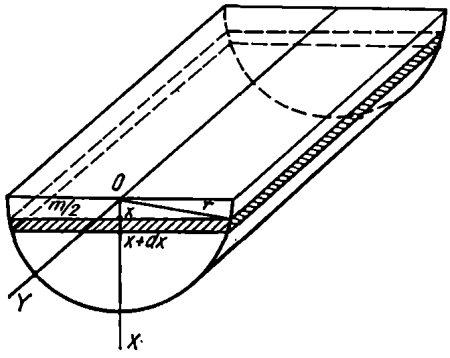


Рис. 5.34

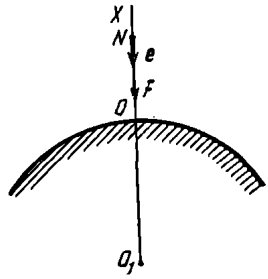


Рис. 5.35

$= 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$. Элементарная работа, совершаемая для поднятия этого слоя воды на высоту x, равна $dA = 2\rho g a x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, где ρ — плотность воды. В таком случае

$$A = 2a\rho g\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -a\rho g\left[\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\right]\Big|_0^r = \frac{2}{3}\rho g a r^3. \blacksquare$$

Пример 2. Какую работу надо затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h (рис. 5.35)?

□ На тело массой m действует сила притяжения $\mathbf{F}$ Земли, направленная к ее центру. Модуль этой силы обратно пропорционален квадрату расстояния тела от центра O_1 Земли, т. е. $\mathbf{F} = k\dfrac{\mathbf{e}}{(R+x)^2}$, $|\mathbf{e}| = 1$, где k — постоянная, определяемая из условия, что на поверхности Земли при $x = 0$ сила $\mathbf{F}$ по модулю равна mg, т. е. $mg = k/R^2$, откуда $k = mgR^2$. Тогда элементарная работа $dA = F_x\,dx$, где F_x — проекция силы $\mathbf{F}$ на ось X, т. е. $dA = \dfrac{mgR^2}{(R+x)^2}\,dx$. Полная же работа определяется соотношением

$$A = -mgR^2\int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = mgR^2\,\frac{1}{R+x}\Big|_0^h = -\frac{mgRh}{R+h}.$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена противоположно оси X. ■

Масса неоднородного стержня. Пусть на отрезке $[a, b]$ оси X расположен неоднородный стержень с линейной плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Разбивая отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и считая плотность каждого такого отрезка постоянной и равной $\rho(\xi_i)$, где ξ_i — произвольная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, получим, что масса этого отрезка стержня приближенно равна $\Delta m_i = \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$. Тогда масса всего стержня приближенно равна

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

В пределе при $\Delta \to 0$ получим точное значение массы стержня в виде

$$m = \lim_{\Delta \to 0} \sigma_n = \int_a^b \rho(x)\, dx. \tag{5.142}$$

Центр тяжести кривой. Пусть на плоскости XY даны n материальных точек $A_i = (x_i, y_i)$, в которых содержатся массы m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Центром тяжести* данной системы точек называется точка $C = (x_C, y_C)$, такая, что

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}; \\ y_C &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \end{aligned}\right\} \tag{5.143}$$

Найдем координаты центра тяжести гладкой кривой AB с однородной плотностью $\rho = \text{const}$. Как обычно, разобьем эту дугу точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$ на элементарные дуги длиной Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если s — параметр дуги, $0 \leqslant s \leqslant S$, то разбиению дуги AB отвечает разбиение отрезка $[0, S]$ вида $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{i-1} < s_i < \ldots < s_n = S$. Будем считать, что масса дуги $M_{i-1} M_i$, приближенно равная $\Delta m_i = \rho \Delta s_i$, сосредоточена в произвольной точке $N_i = (x_i, y_i)$ этой дуги и точке N_i отвечает значение параметра $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$. Тогда всю кривую AB можно рассматривать как систему материальных точек N_i с массами $\Delta m_i = \rho \Delta s_i$. В таком случае приближенно центр тяжести кривой, согласно формуле (5.143), определится равенствами

$$(x_C)_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \Delta m_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \Delta s_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i\right);$$

$$(y_C)_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \Delta m_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \Delta s_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i\right).$$

Совершив предельный переход в интегральных суммах при $\Delta = \max\{\Delta s_i\} \to 0$, получим координаты центра тяжести однородной кривой:

$$x_C = \int_0^S x\, ds \Big/ \int_0^S ds; \quad y_C = \int_0^S y\, ds \Big/ \int_0^S ds. \tag{5.144}$$

Заметим, что $\int\limits_0^S ds = S$, где S — длина рассматриваемой дуги AB.

Если кривая AB описывается уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ и, следовательно, координаты центра тяжести кривой, согласно формуле (5.144), определяются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \Big/ \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx; \\ y_C &= \int_a^b y\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \Big/ \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (5.145)$$

При параметрическом задании кривой уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, формулы (5.144) преобразуются к виду:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \Big/ \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt; \\ y_C &= \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \Big/ \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (5.146)$$

Если же кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \int_\alpha^\beta \rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi \Big/ \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi; \\ y_C &= \int_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi \Big/ \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (5.147)$$

Первая теорема Гульдина*. Теорема 5.15. Площадь поверхности образованная вращением дуги вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости этой дуги и не пересекающей ее, равна произведению длины дуги на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

□ Пусть ось X — ось вращения, а кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Сравнивая формулу (5.87) площади поверхности вращения и формулу (5.145) ординаты y_C центра тяжести кривой, получаем

$$P = 2\pi y_C S, \qquad (5.148)$$

где S — длина кривой. ■

Теорема Гульдина позволяет легко находить площадь некоторых поверхностей вращения, если известно положение центра тяжести кривой. Поверхность, полученная от вращения окружности $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, $0 \leqslant R \leqslant a$, вокруг оси Y, называется *тором*. В данном случае длина вращающейся окружности равна $2\pi R$, а центр тяжести ее находится в точке $(a, 0)$. Длина окружности, описываемой этим центром при вращении вокруг оси Y, равна, очевидно, $2\pi a$. Тогда площадь поверхности тора, согласно теореме Гульдина, равна $P = 2\pi a \cdot 2\pi R = 4\pi^2 aR$.

Статические моменты и моменты инерции. *Статическим моментом системы n материальных точек $A_i = (x_i, y_i)$* с массами m_i,

---

* П. Гульдин (1577 — 1643) — швейцарский математик.

$i = 1, 2, \ldots, n$, относительно осей X и Y называются величины M_x и M_y, определяемые равенствами

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i; \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i.$$

Если гладкая кривая AB однородна с плотностью $\rho = \text{const}$, то, рассуждая, как и при нахождении координат ее центра тяжести, найдем, что статические моменты M_x и M_y этой кривой определяются равенствами:

$$M_x = \rho \int_0^S y\,ds; \quad M_y = \rho \int_0^S x\,ds. \tag{5.149}$$

Зная выражение дифференциала длины дуги ds кривой, легко получить из равенств (5.149) формулы для нахождения статических моментов M_x и M_y при различных заданиях кривой AB.

Аналогично *моментами инерции системы материальных точек* $A_i = (x_i, y_i)$ с массами m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, относительно осей X и Y и начала координат называются величины, определяемые равенствами $I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$; $I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$; $I_0 = I_x + I_y$ соответственно. Аналогично предыдущему получим, что для гладкой кривой AB с однородной плотностью ρ эти моменты инерции определятся равенствами:

$$I_x = \rho \int_0^S y^2 ds; \quad I_y = \rho \int_0^S x^2 ds; \quad I_0 = I_x + I_y. \tag{5.150}$$

Пример 3. Найти координаты центра тяжести однородной полуокружности ($\rho = 1$) $x^2 + y^2 = a^2$ ($y \geqslant 0$), а также моменты инерции ее относительно осей и начала координат.

□ Запишем уравнение верхней полуокружности в параметрическом виде $x = a\cos t$; $y = -a\sin t$, $-\pi \leqslant t \leqslant 0$. Тогда $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = a\,dt$. Согласно равенству (5.149), имеем $M_x = -\int_{-\pi}^{0} a\sin t\,a\,dt = 2a^2$; $M_y = \int_{-\pi}^{0} a\cos t a dt = 0$.

Длина полуокружности равна πa, поэтому по формулам (5.144) координаты центра тяжести равны $x_C = \frac{M_y}{\pi a} = 0$; $y_C = \frac{M_x}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$.

Далее по формулам (5.150) находим

$$I_x = \int_{-\pi}^{0} a^2 \sin^2 t a dt = \frac{\pi a^3}{2};$$

$$I_y = \int_{-\pi}^{0} a^2 \cos^2 t\,a\,dt = \frac{\pi a^3}{2}; \quad I_0 = \pi a^3. \blacksquare$$

Задачи и упражнения

1. Котел, имеющий форму полусферы радиуса a, наполнен водой. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из котла.

2. Определить силу, действующую на пластинку, погруженную в жидкость на глубину c. Пластинка имеет форму равнобочной трапеции с основаниями a и b и высотой h.

3. Определить координаты центра тяжести круговой дуги $x = a\cos\varphi$; $y = a\sin\varphi$, $|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

4. Найти статический момент и момент инерции относительно оси X одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5.10. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Определение интеграла Римана предполагает, что подынтегральная функция ограничена и отрезок интегрирования имеет конечную длину. Можно обобщить понятие определенного интеграла, устранив эти ограничения, т. е. распространив понятие интеграла на случай бесконечных пределов интегрирования или неограниченной подынтегральной функции.

Рассмотрим случай бесконечного промежутка интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном его отрезке $[a, B]$, $a < B$.

Несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ называется предел

$$\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx, \tag{5.151}$$

который обозначается символом $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Итак, по определению,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx. \tag{5.152}$$

Если предел (5.151) существует и конечен, то несобственный интеграл (5.152) называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично вводятся несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,dx; \tag{5.153}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)\,dx. \tag{5.154}$$

С геометрической точки зрения сходящийся интеграл (5.152) означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geqslant 0$, прямыми $x = a$ и $y = 0$, бесконечно вытянутая в направлении оси X, имеет конечную площадь S (рис. 5.36, *а*). Аналогично сходящиеся интегралы (5.153) и (5.154) определяют конечную площадь фигур, изображенных на рис. 5.36, *б* и 5.36, *в* соответственно. Если же функция $f(x)$ знакопеременна, например на $[a, +\infty)$, то сходящийся интеграл (5.152) равен алгебраической сумме положительных и отрицательных площадей, изображенных на рис. 5.36, *г*.

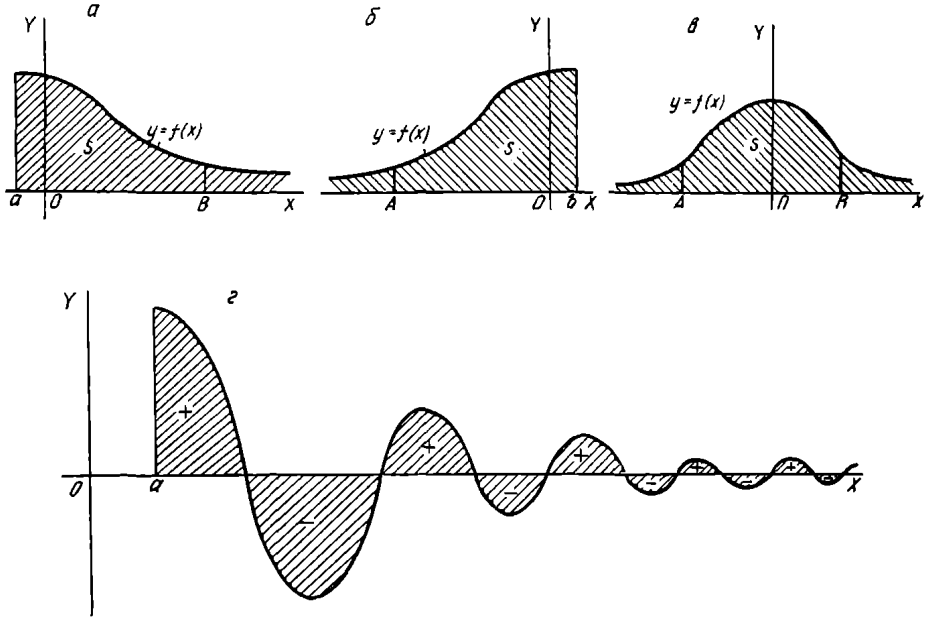


Рис. 5.36

Пусть F — первообразная подынтегральной функции f. Согласно формуле Ньютона—Лейбница и определению несобственных интегралов (5.152) и (5.153), имеем

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} F(x)\Big|_a^B = \lim_{B\to\infty}[F(B) - F(a)] = \lim_{B\to\infty} F(B) - F(a);$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} F(x)\Big|_A^b = \lim_{A\to-\infty}[F(b) - F(A)] = F(b) - \lim_{A\to-\infty} F(A).$$

Таким образом, несобственные интегралы (5.152) и (5.153) сходятся тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B)$ и $\lim\limits_{A\to-\infty} F(A)$ соответственно.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

□ Имеем, по определению,

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to\infty}\int_0^B\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^B =$$

$$= \lim_{B\to\infty} (\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg} B = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Исследовать, при каких значениях α сходится несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{5.155}$$

□ Имеем, по определению,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^\infty x^{-\alpha} dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B x^{-\alpha} dx = \lim_{B\to\infty} \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^B & \alpha \neq 1; \\ \ln|x|\,\Big|_a^B & \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{B\to\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{B^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right); \\ \lim\limits_{B\to\infty} (\ln B - \ln a) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}, & \alpha > 1; \\ \infty, & \alpha < 1; \\ \infty, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл (5.155) сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leqslant 1$.

Заметим, что так как

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^B f(x)\,dx + \int_B^\infty f(x)\,dx,$$

то из равенства (5.152) следует, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда к нулю сходится интеграл $\int_B^\infty f(x)\,dx$. ■.

Признаки сходимости несобственных интегралов. Выясним условия, гарантирующие существование несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема 5.16 (критерий Коши). *Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $B > a$, такое, что для всех $B' > B$, $B'' > B$ выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{5.156}$$

□ Рассмотрим функцию $F(B) = \int_a^B f(x)\,dx$, которая, согласно критерию Коши (теорема 2.6), имеет конечный предел при $B \to \infty$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B > a$, такое, что для всех $B' > B$ и $B'' > B$ выполняется неравенство

$$|F(B') - F(B'')| = \left|\int_a^{B'} f(x)\,dx - \int_a^{B''} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

что совпадает с неравенством (5.156). ■

Теорема 5.17 (признак сравнения). Если на промежутке $[a, +\infty)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном промежутке $[a, B]$, причем

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \geqslant a_0 \geqslant a, \tag{5.157}$$

то из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

□ В силу неравенств (5.157) для любых $B' \geqslant a_0$ и $B'' \geqslant a_0$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} g(x)\,dx\right|. \tag{5.158}$$

Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится. Тогда в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B \geqslant a_0$, такое, что из неравенств $B' > B$ и $B'' > B$ с учетом соотношения (5.158) имеем неравенство

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

что и означает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится. Если предположить, что интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то на основании только что доказанного интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ должен сходиться, что противоречит допущению о его расходимости. ■

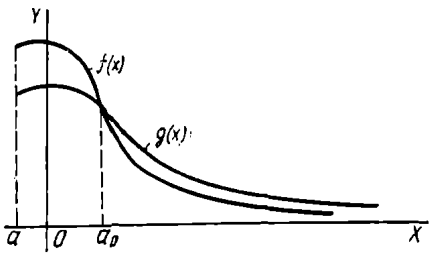


Рис. 5.37

Итак, если сходится интеграл от «большей» функции, то сходится несобственный интеграл и от «меньшей» функции. Если же несобственный интеграл от «мень-

шей» функции расходится, то тем более расходится интеграл от «большей» функции (рис. 5.37).

На практике удобно пользоваться предельным признаком сравнения, который состоит в следующем.

Теорема 5.18 (предельный признак сравнения). Пусть на промежутке $[a, +\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном промежутке $[a, b]$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L > 0,$$

то несобственные интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

□ Существование предела L означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число a_0, такое, что

$$\forall x \geqslant a_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon.$$

Отсюда в силу положительности $g(x)$ для всех $x \geqslant a_0$ выполняется неравенство

$$(L-\varepsilon)\,g(x) < f(x) < (L+\varepsilon)\,g(x).$$

Из этого неравенства на основании теоремы 5.17 следует, что из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty (L+\varepsilon)\,g(x)\,dx$ (а значит, и интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$) вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, а из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty (L-\varepsilon)\,g(x)\,dx$, а следовательно, и интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$, поскольку $L \pm \varepsilon$ — постоянные числа. Аналогичные рассуждения проводим в случае расходимости. ■

На практике для сравнения часто используется функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Известно, что при $\alpha > 1$ интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ этот интеграл расходится. Число α называется *порядком убывания* функции $1/x^\alpha$ на бесконечности.

Пример 3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

□ Наибольшая степень трехчлена в знаменателе равна 2. Поэтому для сравнения возьмем функцию $g(x) = 1/x^2$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+2} = 1 \neq 0,$$

и поскольку интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится и исходный несобственный интеграл. Вычислив его, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_{A}^{B} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{A}^{B} = \pi. \blacksquare$$

Пример 4. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}$.

□ Оценим порядок убывания подынтегральной функции на бесконечности. Имеем

$$\frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}} \cdot \frac{1}{x^{4/3}} \sim \frac{1}{x^{4/3}} \text{ при } x \to \infty,$$

т. е. порядок убывания дроби $\alpha = \frac{4}{3} > 1$. Поскольку интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ сходится, то сходится и $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}$, а значит, исходный интеграл тоже сходится: $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}$. ■

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$. Если же интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, а несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он называется *условно сходящимся*.

Из неравенств $f(x) \leqslant |f(x)|$ и $\left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{B'}^{B''} |f(x)|\,dx$ в силу критерия Коши следует, что *всякий абсолютно сходящийся несобственный интеграл сходится.*

Пример 5. Исследовать на абсолютную сходимость $\int_0^\infty \frac{\cos 2x dx}{1+x^2}$.

□ Так как $|\cos 2x| \leqslant 1$, $\forall x$, то $\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|\,dx}{1+x^2} \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$. Отсюда следует, что исходный интеграл сходится абсолютно. ■

Пример 6. Исследовать на сходимость

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{5.159}$$

□ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim\limits_{B\to\infty} \int_1^B \frac{\sin x}{x}\,dx = -\lim\limits_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x}\,d\cos x = -\lim\limits_{B\to\infty} \frac{\cos x}{x}\Big|_1^B +$

$+ \lim\limits_{B\to\infty} \int_1^B \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \lim\limits_{B\to\infty} \int_1^B \frac{\cos x dx}{x^2} = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$

Так как $\frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, то последний интеграл абсолютно сходится, т. е. интеграл (5.159) сходящийся.

Рассмотрим теперь

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx. \tag{5.160}$$

Из неравенства $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ при любом $B > 1$ получаем

$$\int_1^B \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^B \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^B \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Так как интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится, а интеграл $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится, что доказывается точно так же, как и сходимость интеграла (5.159), то интеграл (5.160) расходится. Это значит, что исходный интеграл (5.159) сходится условно. ■

Признак Абеля — Дирихле. Докажем теперь следующий достаточный признак сходимости несобственных интегралов.

Теорема 5.19 (признак Абеля — Дирихле*). Пусть функции $f(x)$

* Н. Х. Абель (1802—1829) — норвежский математик; П. Г. Л. Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

и $g(x)$ определены и непрерывны на промежутке $[a, +\infty)$, функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, имеет непрерывную производную $g'(x)$, а функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $F(x)$ при $x \geqslant a$. Тогда интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \tag{5.161}$$

сходится.

□ Так как первообразная $F(x)$ ограничена, то существует число $C > 0$, такое, что $|F(x)| \leqslant C$, $\forall x \geqslant a$.

Убедимся в существовании конечного предела

$$\lim_{B \to +\infty} \int_a^B f(x)\, g(x)\, dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_a^B f(x)\, g(x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = g(x), & du = g'(x)\, dx \\ dv = f(x)\, dx, & v = F(x) \end{matrix} \right| = g(x)\ F(x)\Big|_a^B -$$

$$- \int_a^B F(x)\, g'(x)\, dx = g(B)\, F(B) - g(a)\, F(a) - \int_a^B F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{5.162}$$

Имеем $\lim\limits_{B \to \infty} g(B)\, F(B) = 0$ согласно условию теоремы.

Так как $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, то производная $g'(x)$ неположительна или неотрицательна для всех $x \in [a, +\infty)$. Поэтому $\int\limits_a^B |g'(x)|\, dx = \left| \int\limits_a^B g(x)\, dx \right|$. Тогда

$$\left| \int_a^B F(x)\, g'(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^B |F(x)| \cdot |g'(x)|\, dx \leqslant C \int_a^B |g'(x)|\, dx =$$

$$= C \left| \int_a^B g'(x)\, dx \right| = C\, |g(x)| \Big|_a^B = C(|g(B)| - |g(a)|) \leqslant C(|g(B)| + |g(a)|).$$

Отсюда

$$\lim_{B \to \infty} \left| \int_a^B F(x)\, g'(x)\, dx \right| = \left| \int_a^{\infty} F(x)\, g'(x)\, dx \right| \leqslant C\, |g(a)|,$$

так как $\lim\limits_{B \to \infty} g(B) = 0$. С учетом этого из равенства (5.162) вытекает сходимость интеграла (5.161). ■

Пример 7. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x^{\alpha}}\, dx$ $(\omega \neq 0,\ \alpha > 0)$.

□ Пусть $f(x) = \sin \omega x$, $g(x) = 1/x^{\alpha}$. Тогда $F(x) = -\frac{\cos \omega x}{\omega}$, $|F(x)| \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{|\omega|}$. Если $\alpha > 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем требовани-

ям признака Абеля — Дирихле, в соответствии с которым исходный интеграл сходится. Аналогично доказывается сходимость интеграла $\int_1^\infty \frac{\cos \omega x}{x^\alpha}\, dx,\ \alpha > 0$. ■

Замена переменной и интегрирование по частям в несобственных интегралах. Из определения (5.152) и свойств предела вытекают следующие свойства несобственных интегралов от функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных и непрерывных на промежутке $[a, +\infty)$.

1°. Для любых чисел $\alpha, \beta \in R$ справедливо равенство

$$\int_a^\infty [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^\infty f(x)\, dx + \beta \int_a^\infty g(x)\, dx.$$

2°. Если $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^\infty + \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a).$$

3.° Имеет место *формула интегрирования по частям*

$$\int_a^\infty f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty g(x) f'(x)\, dx,$$

где

$$f(x) g(x)\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) g(x) - f(a) g(a).$$

4.° Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = \infty$, то имеет место *формула замены переменной в несобственном интеграле*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt. \tag{5.163}$$

□ В самом деле, равенство (5.163) вытекает из равенства (5.162) и формулы замены переменной в определенном интеграле, т. е.

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\, dx = \lim_{B\to\infty} F(B) - F(a) = \lim_{t\to\beta} F(\varphi(t)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta dF(\varphi(t)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt,$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$. ■

Пример 8. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.

□ Осуществим замену $x = \operatorname{tg} t$; $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$. Тогда $\alpha = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/2$; $\beta = \operatorname{arctg}(\infty) = \pi/2$. В итоге несобственный интеграл I превращается в обычный интеграл $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$. ■

Пример 9. Установить сходимость несобственных *интегралов Френеля**

$$\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx; \quad \int\limits_0^\infty \cos x^2 dx. \tag{5.164}$$

□ Рассмотрим первый интеграл. Осуществим замену $x = \sqrt{t}$; $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, $t \in [0, +\infty)$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}\,\dfrac{\sin t}{t} = 0$, то первый интеграл в последнем равенстве существует как определенный интеграл Римана по конечному промежутку интегрирования. Сходимость второго интеграла доказана в примере 7 ($\alpha = 1/2$). Поэтому интеграл Френеля $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$ сходится.

Аналогично доказывается сходимость второго интеграла (5.164). ■

Пример 10. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^\infty \cos(x^3 + x)\,dx$.

□ Сделаем замену $t = x^3 + x = \varphi(x)$. Так как функция $\varphi(x)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$, то существует обратная функция $x = \varphi^{-1}(t)$, строго монотонно возрастающая на $[0, +\infty)$. Тогда

$$dx = \frac{dt}{3x^2 + 1} = \frac{dt}{3[\varphi^{-1}(t)]^2 + 1} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \cos(x^3 + x)\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos t\,dt}{3[\varphi^{-1}(t)]^2 + 1}.$$

Последний интеграл сходится по признаку Абеля — Дирихле ($f(t) = \cos t$, $g(t) = 1/(3[\varphi^{-1}(t)]^2 + 1)$), что и доказывает сходимость исходного интеграла. ■

Несобственные интегралы от неограниченных функций. Признаки сходимости. Предположим, что функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$ и не ограничена при $x \to b - 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Точка b при этом называется *особой* для функции $f(x)$. Будем считать, что для любого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[a, b - \varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема, т. е. существует $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, являющийся интегралом с переменным верхним пределом. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{5.165}$$

то этот предел называется несобственным интегралом от функции

* О. Ж. Френель (1788—1827) — французский физик.

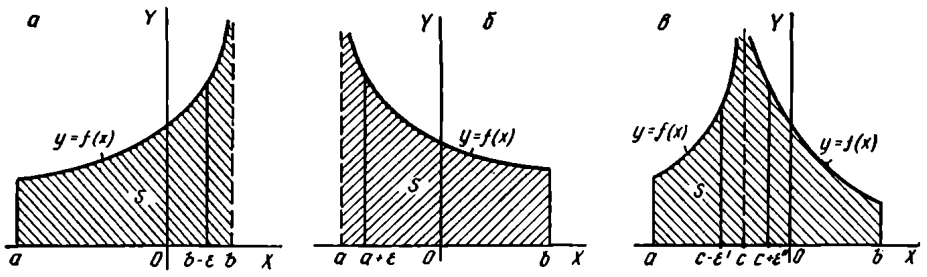


Рис. 5.38

$f(x)$ или *несобственным интегралом 2-го рода* на промежутке $[a, b)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{5.166}$$

Аналогично если функция $f(x)$ имеет особенность в точке $x = a$, то, по определению, положим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{5.167}$$

Если же особой точкой функции $f(x)$ является точка c, $a<c<b$, то

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon' \to +0 \\ \varepsilon'' \to +0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx \right). \tag{5.168}$$

Несобственный интеграл 2-го рода называется *сходящимся*, если существует конечный предел (5.166), или (5.167), или (5.168). В противном случае интеграл называется *расходящимся*.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл 2-го рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, бесконечно вытянутая в направлении оси Y при $x \to b - 0$ ($x \to a - 0$, $x \to c \pm 0$), имеет конечную площадь S (рис. 5.38, *а*, *б*, *в*).

Пусть точка $x = b$ ($x = a$) является особой для функции $f(x)$. Тогда если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то в силу равенств (5.166) и (5.167)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b-0) - F(a)$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^b = \right.$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [F(b) - F(a+\varepsilon)] = F(b) - F(a+0)).$$

Следовательно, если функция $f(x)$ имеет особенность при $x=b$, то несобственный интеграл (5.166) сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $F(b-0)$ первообразной $F(x)$ при $x \to b-0$. Аналогично если функция $f(x)$ имеет особенность в точке $x=a$, то несобственный интеграл (5.167) сходится в том и только в том случае, если существует конечный предел $F(a+0)$ первообразной $F(x)$ при $x \to a+0$.

Пример 11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

□ Подынтегральная функция $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена при $x \to 1$. Согласно равенству (5.166), имеем

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} = 1,$$

т. е. исходный интеграл сходится и равен 1. ■

Пример 12. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \arcsin(1-\varepsilon) = \pi/2.$

Пример 13. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{5.169}$$

□ При $\alpha > 0$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$. Получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1, & \alpha \neq 1; \\ \ln x\Big|_\varepsilon^1, & \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \cdot \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1; \\ \ln 1 - \ln \varepsilon, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1; \\ +\infty, & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, несобственный интеграл (5.169) сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$. ■

Теория несобственных интегралов первого рода без труда переносится на случай несобственных интегралов от неограниченных функций. В связи с этим мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями.

Пусть функция $f(x)$ имеет особенность в точке c, где $a \leqslant c \leqslant b$. Имеют место следующие теоремы, доказательство которых предоставляем читателю.

Теорема 5.20 (критерий Коши). Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое $\delta > 0$, что для любых α', α'', β', β'', удовлетворяющих условиям $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$, $0 < \beta' < \beta'' < \delta$, выполнялось неравенство

$$\left| \int_{c-\alpha'}^{c-\alpha''} f(x)\,dx + \int_{c+\beta'}^{c+\beta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \tag{5.170}$$

если $a < c < b$. Если же $c = a$ $(c = b)$, то неравенство (5.170) имеет вид

$$\left| \int_{a+\beta'}^{a+\beta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \left(\left| \int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \right).$$

Теорема 5.21 (признак сравнения). Пусть в проколотой окрестности точки c, $a < c < b$ (или в левой (правой) окрестности точки $c = b$ $(c = a)$) определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 5.22 (предельный признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны на отрезке $[a, b]$, $x \neq c$. Тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L > 0$, то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Определение абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов второго рода аналогично соответствующим определениям для интегралов первого рода. Точно так же всякий абсолютно сходящийся несобственный интеграл второго рода является просто сходящимся.

Пример 14. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \dfrac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$.

□ Подынтегральная функция $f(x)$ имеет особенность в точке $x = 0$, в правой окрестности которой она ведет себя как функция $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$, причем интеграл $\int_0^1 \dfrac{1}{x\sqrt{2}}\,dx$ расходится. Так как

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cdot(x+1)\,x\sqrt{2}}{x\sqrt{x+2}}=1,$$

то по предельному признаку сравнения исходный интеграл тоже расходится. ■

Сформулируем теперь *правило замены переменной в несобственном интеграле второго рода.*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ (на $(a, b]$), функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$ (на $(\alpha, \beta]$), причем $a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<b=\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)$, $\alpha\leqslant t<\beta$ $(b=\varphi(\beta)\geqslant\varphi(t)>a=\lim\limits_{t\to\alpha}\varphi(t)$, $\alpha<t\leqslant\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.171}$$

При этом интегралы в обеих частях формулы (5.171) одновременно сходятся или расходятся.

Может оказаться, что заменой переменного несобственный интеграл второго рода сводится к несобственному интегралу первого рода (и наоборот) или превращается в обычный интеграл.

Пример 15. Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ заменой $x=\frac{1}{t}$ сводится к несобственному интегралу второго рода $\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$ $=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

В заключение приведем *формулу интегрирования по частям в несобственном интеграле второго рода.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b)$ (на $(a, b]$), то

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x),$$

где

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b=\lim_{\varepsilon\to+0}u(b-\varepsilon)\,v(b-\varepsilon)-u(a)\,v(a)$$

$$\left(u(x)\,v(x)\Big|_a^b=u(b)\,v(b)-\lim_{\varepsilon\to+0}u(a+\varepsilon)\,v(a+\varepsilon)\right).$$

Главное значение несобственного интеграла. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси $\mathbf{R}$ и интегрируема на каждом отрезке $[a, b]\subset R$. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ *сходится в смысле главного значения*, если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}f(x)\,dx$.

Этот предел называется *главным значением несобственного интеграла* от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначается символом

$$\text{V. p.}^* \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx. \tag{5.172}$$

Если рассматривается несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ имеет особенность в точке c, $a<c<b$, то, по определению,

$$\text{V. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right). \tag{5.173}$$

Если $f(x)$ — нечетная функция на всей числовой оси, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится в смысле главного значения и равен нулю. Это вытекает из формулы (5.172) и свойства интеграла от нечетной функции по симметричному относительно точки $x=0$ промежутку.

Пример 16. Найти V. p. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, где $a<0$, $b>0$.

□ Согласно равенству (5.173), имеем

$$\text{V. p.} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to+0} [\ln|\varepsilon| - \ln|a| + \ln|b| - \ln|\varepsilon|] =$$

$$= \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right|. \quad \blacksquare$$

Пример 17. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в окрестности точки $x=0$ и имеет в этой точке производную. Показать, что интеграл $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $a<0$, $b>0$, сходится в смысле главного значения.

□ Имеем

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_a^b \frac{\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема при $x=0$, то функция $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ ограничена в окрестности этой точки. Поэтому интеграл $\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$ существует как обычный интеграл Римана. Главное значение

* V. p. — Valeur principal (фр.) — главное значение.

$$\text{V. p.}\int_a^b \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \varphi(0)\ \text{V. p.}\int_a^b \frac{dx}{x} = \varphi(0)\ln\left|\frac{b}{a}\right|.$$

Таким образом, интеграл $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ в смысле главного значения существует, причем $\text{V. p.}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \varphi(0)\ln\left|\frac{b}{a}\right|$. ■

Задачи и упражнения

1. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{(2x+1)^2+1}$; б) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x+x^2}}$; в) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$;

г) $\int_0^\infty \cos x\,dx$; д) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; е) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

ж) $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; з) $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}\,dx$.

2. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что если существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, то $A = 0$.

3. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \neq 0$. Доказать, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ расходится.

4. Применяя формулу Ньютона — Лейбница, имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2.$$

При этом допущена грубая ошибка. В чем она состоит?

5. Доказать, что интеграл $\int_{-\infty}^\infty \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$ расходится в обычном смысле, но сходится в смысле главного значения.

6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Окрестности точки в пространстве. Открытые и замкнутые множества. Напомним некоторые сведения о пространстве $\mathbf{R}^n$, где через $\mathbf{R}^n$ обозначается множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящих из n действительных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Каждый такой набор обозначается $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и называется *точкой* пространства $\mathbf{R}^n$, а x_i — *i-й координатой* этой точки. Расстояние между двумя точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ этого пространства определяется равенством

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (y_n - y_n)^2}, \qquad (6.1)$$

являющимся естественным обобщением формулы $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ расстояния между двумя точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ на плоскости и формулы $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ расстояния между точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ пространства $\mathbf{R}^3$. Множество $\mathbf{R}^n$ с введенным в нем расстоянием между двумя точками называется *метрическим пространством* $\mathbf{R}^n$.

Метрическое пространство $\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как векторное пространство, если для его элементов (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определить равенство соотношением

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y}) \Leftrightarrow (x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \ldots, \ x_n = y_n), \qquad (6.2)$$

сумму $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ — формулой

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ \ldots, \ x_n + y_n), \qquad (6.3)$$

а произведение $\alpha\mathbf{x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, — равенством

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ \alpha x_2, \ \ldots, \ \alpha x_n). \qquad (6.4)$$

Если в пространстве $\mathbf{R}^n$ выбрать ортонормированный базис и точку O (начало координат), то получим систему координат в $\mathbf{R}^n$ — обобщение декартовой системы координат в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbf{R}^n$ определяется равенством (1.83):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n; \qquad (6.5)$$

при этом норма (длина) вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ определяется по формуле

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

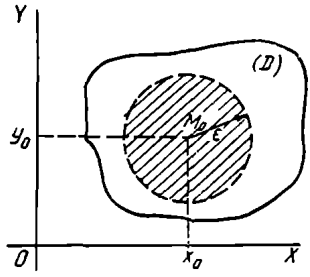


Рис. 6.1

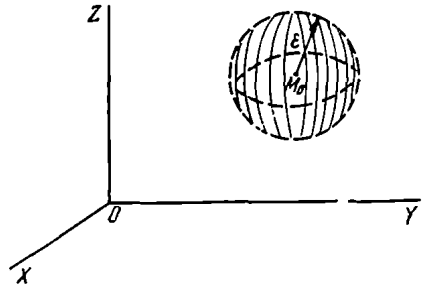


Рис. 6.2

а расстояние $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — равенством

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{6.6}$$

что совпадает с формулой (6.1).

Пусть $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — точка некоторого множества $D \subset \mathbf{R}^n$. Совокупность точек $\mathbf{x}$ множества D, таких, что $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \varepsilon$, называется *ε-окрестностью* точки $\mathbf{x}^0$ и обозначается $U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$. Таким образом, по определению,

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in D \subset \mathbf{R}^n \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon\}. \tag{6.7}$$

Множество (6.7) называется также *n-мерным шаром* радиуса ε с центром в точке $\mathbf{x}^0$. Окрестность $\dot{U}_\varepsilon(\mathbf{x}^0) = U_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \setminus \mathbf{x}^0$ точки $\mathbf{x}^0$, из которой удалена сама точка $\mathbf{x}^0$, называется *проколотой*. В случае $n = 2$ положим $x_1 = x$; $x_2 = y$; $\mathbf{x}^0 = M_0 = (x_0, y_0)$. Тогда формула (6.7) принимает вид

$$U_\varepsilon(M_0) = \{(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\} \tag{6.8}$$

и определяет круг радиуса ε (или ε-круг) с центром в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ (рис. 6.1).

При $n = 3$ положим $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $\mathbf{x}^0 = M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. В этом случае равенство

$$U_\varepsilon(M_0) = \{(x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\} \tag{6.9}$$

определяет *ε-шар* (или шар радиуса ε) в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ с центром в точке M_0 радиуса ε (рис. 6.2).

Введем понятия открытого и замкнутого множеств. Точка $M_0 \in D$ называется *внутренней точкой* множества D, если она принадлежит множеству D вместе с некоторой своей ε-окрестностью, т. е. если существует $\varepsilon > 0$, такое, что $U_\varepsilon(M_0) \subset D$ (см. рис. 6.1). Множество внутренних точек данного множества D называется его *внутренностью* и обозначается $\mathring{D}$. Множество D называется *открытым*, если каждая его точка внутренняя, т. е. для любой точки $M_0 \in D$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(M_0) \subset D$.

Пример 1. Покажем, что всякая ε-окрестность точки $M_0 \subset \mathbf{R}^n$ есть открытое множество.

□ В самом деле, пусть M — произвольная точка множества $U_\varepsilon(M_0) \subset \mathbf{R}^n$ (рис. 6.3) и $\rho(M_0, M) = d < \varepsilon$. Тогда для $\delta = \varepsilon - d$ окрестность $U_\delta(M)$ содержится в множестве $U_\varepsilon(M_0)$. ■

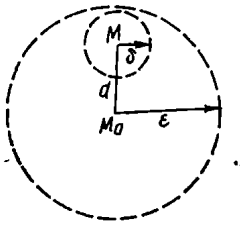


Рис. 6.3

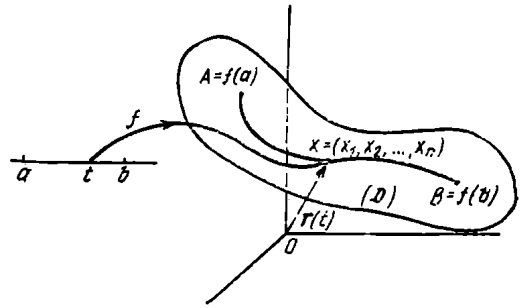


Рис. 6.4

Предельной точкой множества D называется такая точка, любая окрестность которой содержит бесчисленное множество точек из D. Объединение множества D и множества всех его предельных точек называется *замыканием множества* D и обозначается $\overline{D}$. Множество D называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. $D = \overline{D}$. *Границей* множества D называется множество $\Gamma = \overline{D} \setminus \mathring{D}$.

Пример 2. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто.

Пример 3. Множество $U_\varepsilon(M_0)$ вида (6.8) является открытым. Если к нему присоединить окружность $\Gamma = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \varepsilon\}$ радиуса ε с центром в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, то получим замкнутое множество $\overline{U}_\varepsilon(M_0)$—круг с тем же радиусом и центром. Таким образом,

$$\overline{U_\varepsilon(M_0)} = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leqslant \varepsilon\}.$$

Пример 4. Множество $\overline{U_\varepsilon(M_0)} = \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \leqslant \varepsilon\}$ является замкнутым шаром радиуса ε с центром в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Связные множества. Ограниченные множества. *Непрерывным путем* в $\mathbf{R}^n$ называется непрерывное отображение отрезка $[a, b] \subset \mathbf{R}^1$ в пространство $\mathbf{R}^n$ (рис. 6.4).

Множество $D \subset \mathbf{R}^n$ называется *связным*, если для любой пары его точек A и B существует непрерывный путь с началом в A и концом в B, целиком принадлежащий D (рис. 6.4). Множество D называется *выпуклым*, если любые две его точки можно соединить отрезком, целиком принадлежащим D. Очевидно, выпуклое множество является связным. Связность множества характеризует свойство его «целостности», т. е. связное множество состоит из единого «куска». Примерами связных множеств являются круг, шар, кольцо, тор («бублик») и др. Если граница множества в свою очередь явля-

Рис. 6.5

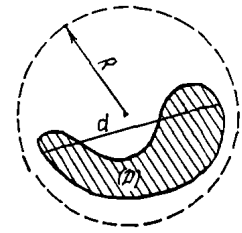


Рис. 6.6

ется связным множеством, то множество D называется *односвязным*. Множество называется *n-связным*, если его граница состоит из n непересекающихся связных множеств. Например, проколотая окрестность точки $M_0 \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, является двусвязным множеством; множество, изображенное на рис. 6.5, — пятисвязным.

Открытое связное множество называется *областью*. Множество D называется *ограниченным*, если существует шар конечного радиуса R, целиком содержащий множество D (рис. 6.6). *Диаметром* множества D называется величина $d = \operatorname{diam} D$, определяемая равенством $d = \sup\limits_{x,\, y \in D} \rho(x, y)$ (рис. 6.6). Очевидно, множество D ограничено в том и только в том случае, если его диаметр — конечное число.

Понятие предела в $\mathbf{R}^n$. Последовательность $\left(\mathbf{x}^{(m)}\right) = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$ элементов из $\mathbf{R}^n$ называется *сходящейся* к $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер N, такой, что для всех $m \geqslant N$ выполнено неравенство

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^0\right) < \varepsilon. \tag{6.10}$$

При этом будем писать $\lim\limits_{m \to \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^0$. Таким образом,

$$\left(\lim_{m \to \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{m \to \infty} \rho\left(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{x}^0\right) = 0\right). \tag{6.11}$$

Теорема 6.1. Для того чтобы последовательность $\mathbf{x}^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$ сходилась к точке $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.12}$$

□ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{m \to \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в силу неравенства (6.10) имеем

$$\sqrt{\left(x_1^{(m)} - x_1^0\right)^2 + \left(x_2^{(m)} - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n^{(m)} - x_n^0\right)^2} < \varepsilon, \tag{6.13}$$

откуда $\left|x_i^{(m)} - x_i^0\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall m \geqslant N$, что равносильно соотношениям (6.12).

Достаточность. Пусть имеют место равенства (6.12). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать N_i, такой, что для всех $m \geqslant N_i$ выпол-

няются неравенства $|x_i^{(m)} - x_i^0| < \varepsilon/\sqrt{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. При $N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ справедливы все неравенства $|x_i^{(m)} - x_i^0| < \varepsilon/\sqrt{n}$ одновременно. В таком случае для выбранного N выполнено неравенство (6.13). ■

Итак, сходимость последовательности $(\mathbf{x}^{(m)}) \in \mathbf{R}^n$ к $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$ равносильна *покоординатной* сходимости последовательностей $(x_i^{(m)})$ к x_i^0, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задачи и упражнения

1. Найти предельные точки последовательности $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $n \in N$.

2. Доказать, что множество D замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение D^c открыто.

3. Доказать соотношение $(A \subset B) \Rightarrow (\operatorname{diam} A \leqslant \operatorname{diam} B)$.

4. Доказать, что пересечение любого числа ограниченных множеств есть ограниченное множество.

5. Доказать, что объединение конечного числа ограниченных множеств есть ограниченное множество.

6.2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятие функции многих переменных. Пусть D — некоторое множество точек $M = (x, y)$ плоскости. Правило f, ставящее в соответствие точке $(x, y) \in D$ определенное число z, называется *функцией двух переменных* и обозначается $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$. Множество D при этом называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Число $z = f(M)$ или $z = f(x, y)$ называется *значением функции* f в точке $M = (x, y)$. Множество

$$E(f) = \{z \in \mathbf{R} \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

называется *областью* или *множеством значений* функции f.

Пример 1. Правило $f : (x, y) \to x + y$, ставящее в соответствие каждой паре чисел x и y их сумму $x + y$, определяет функцию $f(x, y) = x + y$. Очевидно, для нее $D(f) = \mathbf{R}^2$, а $E(f) = \mathbf{R}$.

Пример 2. Для функции $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ областью определения является множество $D(f) = \{(x, y) \mid 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0\}$, т. е. круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а областью значений является отрезок $[0, 1]$.

Аналогично определяется *функция* $u = f(x, y, z)$ *трех независимых переменных* x, y и z: это правило f, ставящее каждой упорядоченной тройке $(x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$ число u.

Подобным же образом определяется в общем случае и *функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от* n *независимых переменных.*

Как и в случае функции одной переменной, функцию двух переменных можно изобразить графически. Для этого в каждой точке $(x, y) \in D$ вычисляется значение функции $z = f(x, y)$. Тогда тройка чисел $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ определяет в системе координат XYZ некоторую точку P. Совокупность точек $P = (x, y, f(x, y))$ образует

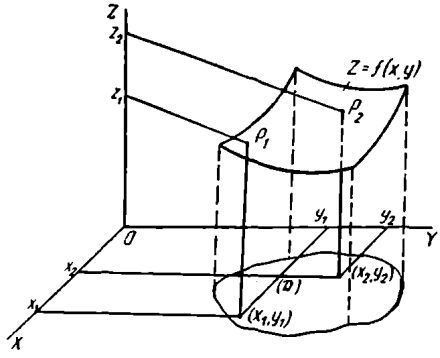


Рис. 6.7

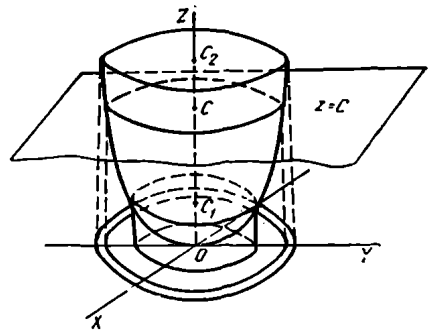


Рис. 6.8

график G_f функции $z = f(x, y)$, являющийся некоторой поверхностью в пространстве $\mathbf{R}^3$ (рис. 6.7). Будем говорить, что задана поверхность $z = f(x, y)$, имея в виду график G_f, определяемый этой функцией.

Пример 3. Графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является верхняя полусфера с центром в точке O радиуса 1.

Пример 4. Графиком функции $z = Ax + By + D$ является плоскость.

График G_f функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется как множество

$$G_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \mid u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}.$$

В некоторых случаях наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий или поверхностей уровня.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости XY, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = C$, где C — постоянная. Другими словами, линия уровня есть кривая, во всех точках которой функция f принимает одно и то же постоянное значение C.

Пример 5. Для функции $z = x^2 + y^2$ линиями уровня являются окружности $x^2 + y^2 = C$, $C \geqslant 0$ (рис. 6.8).

Линия уровня $f(x, y) = C$ является проекцией на плоскость XY линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = C$ (рис. 6.8).

Линии уровня используются в картографии. Так, например, на топографических картах рисуют линии равной высоты над уровнем моря. На метеорологических картах изображают линии одинакового давления — изобары.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек (x, y, z) пространства, удовлетворяющих равенству $f(x, y, z) = C$, где C — постоянная. Например, поверхностями уровня для функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ являются эллипсоиды $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = C$, $C \geqslant 0$, «вложенные» друг в друга. В физике при-

мером поверхностей уровня могут служить эквипотенциальные поверхности, поверхности одинакового давления, температуры и др.

Аналогично вводится понятие поверхности уровня для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, для которых $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$. Заметим, что график функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в то же время можно рассматривать как поверхность уровня функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u = 0$.

Предел функции в точке. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. Число A называется *пределом функции f в точке M_0* (по Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что для всех точек $M = (x, y)$ из проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(M_0)$ точки M_0 выполняется неравенство

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

Если число A — предел функции $f(x, y)$ в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, то этот факт будем записывать в виде

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = A.$$

Используя кванторы, данное определение предела можно записать следующим образом:

$$\left(\lim_{M \to M_0} f(M) = A\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall M \in \dot{U}_\delta(M_0)) : |f(M) - A| < \varepsilon. \tag{6.14}$$

Геометрически определение предела функции в точке по Коши означает тот факт, что функция f отображает точки M окрестности $\dot{U}_\delta(M_0)$ в точки окрестности $U_\varepsilon(A)$ (рис. 6.9).

Дадим определение предела функции в точке по Гейне.

Число A называется пределом функции f в точке M_0, если для любой последовательности (M_n), сходящейся к M_0, $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность $(f(M_n))$ значений функции сходится к A. Если для некоторых последовательностей (M_n') и (M_n''), сходящихся к M_0, пределы последовательностей $(f(M_n'))$ и $(f(M_n''))$ не существуют или имеют разные значения, то это означает, что в точке M_0 функция f предела не имеет.

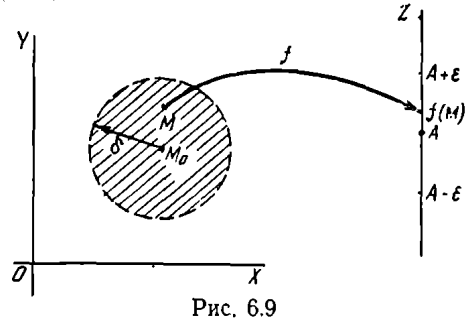


Рис. 6.9

Пример 6. Выяснить, имеет ли функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ предел в точке $O = (0, 0)$.

□ Пусть сначала точка $M(x, y)$ стремится к точке O по оси X, т. е. $M = (x, 0)$. Тогда $\lim\limits_{(x,\,0)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2+0} = 0.$

Аналогично при стремлении точки M к точке O вдоль оси Y $(M = (0, y))$ имеем $\lim\limits_{(0,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{0+y^2} = 0.$

Пусть теперь точка M стремится к точке O вдоль прямой $y = kx$, т. е. $M = (x, kx)$, $k \neq 0$. Тогда

$$\lim_{(x,\,kx)\to(0,\,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k^2}{1+k^2}.$$

Таким образом, при стремлении точки (x, y) к $(0, 0)$ вдоль разных лучей получаются разные пределы. Следовательно, искомая функция в точке O предела не имеет. ■

Доказанные в гл. 2 (ч. 1) свойства функций, имеющих в точке предел, сохраняются и для функций многих переменных. Сформулируем эти свойства.

1°. Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = B$, то:

$$\lim_{M\to M_0} [f(M) \pm g(M)] = A \pm B; \tag{6.15}$$

$$\lim_{M\to M_0} f(M)\,g(M) = A \cdot B; \tag{6.16}$$

$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0). \tag{6.17}$$

2°. Если функция f имеет в точке M_0 предел, то существует окрестность этой точки, в которой функция f ограничена.

3°. Если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A > 0$ $(A < 0)$, то существует окрестность точки M_0, для всех точек M которой $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$.

Повторные пределы. Определение предела функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) предполагает, что x стремится к x_0 независимо от стремления y к y_0, необходимо лишь, чтобы точка (x, y) принадлежала области определения функции $D(f)$. Если зафиксировать переменную y, то функция $f(x, y)$ становится функцией одной переменной x, где $x \in [a(y), b(y)]$ (рис. 6.10). Можно поставить вопрос о существовании предела

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = A(y), \tag{6.18}$$

который является функцией от y. Предельный переход (6.18) означает, что точка M по прямой $y = \text{const}$ стремится к точке $M_0' = (x_0, y)$.

Затем можно поставить вопрос о существовании предела

$$\lim_{y\to y_0} A(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y), \tag{6.19}$$

который называется *повторным пределом*. Предельный переход (6.19) означает, что точка M_0' стремится к точке M_0 по прямой $x = x_0$.

Аналогично вводится повторный предел

$$\lim_{x\to x_0} B(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y), \qquad (6.20)$$

где $B(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)$.

Предельный переход (6.20) означает, что вначале точка M стремится к точке $M_0'' = (x,\ y_0)$ по прямой $x = \text{const}$, а затем точка M_0'' стремится к M_0 по прямой $y = y_0$ (рис. 6.10).

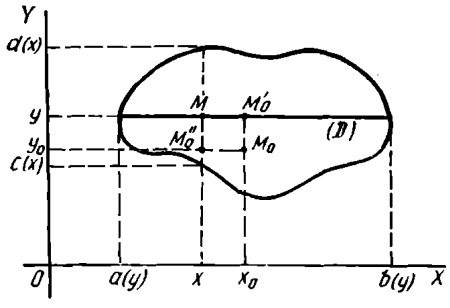


Рис. 6.10

Итак, повторные пределы (6.19) и (6.20) отражают факт стремления переменной точки $M = (x,\ y)$ к точке $M_0 = (x_0,\ y_0)$ по сторонам прямоугольника $MM_0'M_0M_0''$, параллельным координатным осям.

Не следует думать, что повторные пределы необходимо равны.

Пример 7. Найти повторные пределы функции $f(x,\ y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке (0, 0).

□ Имеем

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1;$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1. \blacksquare$$

Итак, в примере 7 повторные пределы оказались различными. Этот факт показывает, что необходимо соблюдать осторожность при перестановке предельных переходов по разным переменным.

Отметим, что соотношения (6.14) определяют так называемый *двойной предел* $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = A$ в отличие от повторных пределов (6.19) и (6.20).

В примере 6 показано, что повторные пределы функции $f(x,\ y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке (0, 0) существуют и равны:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\ y) = 0.$$

Однако самого (двойного) предела в точке (0, 0) функция f не имеет.

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.2. Если существует двойной предел $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y) = A$ и при любом y существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y) = A(y)$, то существует повторный предел

$$\lim_{y\to y_0} A(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y),$$

равный двойному пределу A.

□ Из существования предела A функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) в силу соотношения (6.14) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$; $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Отсюда и из определения предела (6.18) следует, что $|A(y) - A| < \varepsilon$, $0 < |y - y_0| < \delta$. Последнее и означает, что $\lim\limits_{y \to y_0} A(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = A$. ■

Непрерывность функций многих переменных. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0 = (x_0, y_0)$, если ее предел в точке M_0 равен значению функции в этой точке, т. е. если

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \quad (6.21)$$

Заменив в соотношении (6.14) A на $f(M_0)$, получим определение непрерывности функции в точке (по Коши):

$$\left(\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall M \in U_\delta(M_0)):$$
$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon. \quad (6.22)$$

Функция, непрерывная в каждой точке области D, называется *непрерывной в области* D. Точки, в которых функция не определена или не является непрерывной, называются *точками разрыва* функции.

Пример 8. Для функции $z = \dfrac{1}{9x^2 - 4y^2}$ точки разрыва образуют множество точек плоскости XY, определяемое равенством $9x^2 - 4y^2 = 0$, т. е. точки прямых $y = \pm \dfrac{3}{2} x$.

Формула (6.22) определяет непрерывность функции f по *совокупности переменных*. Зафиксируем, например, переменную $y = y_0$, получим функцию $\varphi(x) = f(x, y_0)$ одной переменной x. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, то говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна* в точке (x_0, y_0) *по переменной* x. Аналогично вводится понятие *непрерывности* функции f *по переменной* y в точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

Придадим переменным x и y приращения Δx и Δy соответственно, так что $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = M \in D$. Функция $z = f(x, y)$ при этом получит *полное приращение* в точке M_0, равное

$$\Delta z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(M) - f(M_0). \quad (6.23)$$

Тогда определение непрерывности функции f в точке M_0 (по совокупности переменных) означает, что

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z(M_0) = 0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta):$$
$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \quad (6.24)$$

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$, а $M = (x_0 + \Delta x, \Delta y)$ $(M = (x_0, y_0 + \Delta y))$.

Частными приращениями функции $f(x, y)$ по x (по y) в точке M_0 называются величины

$$\Delta_x z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0); \tag{6.25}$$

$$\Delta_y z(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{6.26}$$

соответственно. Непрерывность функции $f(x, y)$ по переменной x (по y) в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ означает, что

$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z(M_0) = 0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, |\Delta x| < \delta):$$

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{6.27}$$

$$\left(\lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y (M_0) = 0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall\, |\Delta y| < \delta):$$

$$|f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{6.28}$$

соответственно.

Из непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 следует ее непрерывность по каждой из переменных x и y. Обратное утверждение неверно.

Пример 9. Рассмотрим функцию

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

В примере 6 показано, что $\lim\limits_{x \to 0} [xy/(x^2 + y^2)] = \lim\limits_{y \to 0} [xy/(x^2 + y^2)] = 0$, т. е. функция $xy/(x^2 + y^2)$ непрерывна по x и по y в точке $(0, 0)$, но не имеет предела в точке $(0, 0)$. Таким образом, эта функция не является непрерывной по совокупности переменных x и y.

Основные свойства функций многих переменных, непрерывных в некоторой области D, совпадают с соответствующими свойствами функций одной переменной. Сформулируем их.

1°. Если f и g — непрерывные в точке M_0 функции, то непрерывными в ней являются и функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (если $g(M_0) \neq 0$).

2°. Непрерывность сложной функции. Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — сложная функция, где $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$; $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Если функции $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны в точке $\mathbf{t}^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, а функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $M_0 = (x_1(\mathbf{t}^0), x_2(\mathbf{t}^0), \ldots, x_n(\mathbf{t}^0))$, то сложная функция $u = f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ непрерывна в точке $\mathbf{t}^0$.

3°. Устойчивость знака непрерывной функции. Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M_0 и $f(M_0) \neq 0$, то существует δ-окрестность $U_\delta(M_0)$, такая, что для всех точек $M \in U_\delta(M_0)$ знак числа $f(M)$ совпадает со знаком $f(M_0)$.

4°. Промежуточное значение непрерывной функции. Если функция $u = f(M)$ непрерывна на связном множестве D и $f(A)$ и $f(B)$ —

значения ее в точках A, $B \in D$ соответственно, то для любого C из отрезка $[f(A), f(B)]$ найдется точка $\xi \in D$, такая, что $f(\xi) = C$.

5°. **Теорема Вейерштрасса.** Если функция $u = f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $D \subset \mathbf{R}^n$, то она ограничена на нем и достигает в некоторых точках M_1 и M_2 этого множества своих наибольшего и наименьшего значений.

Задачи и упражнения

1. Для следующих функций построить линии уровня, отвечающие значениям $u = 2;\ 0;\ 3$:

а) $u = y^2 - x^2$; б) $u = y^2$; $u = x^2 + y^2 - 1$.

2. Показать, что для функции $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ существуют и равны между собой повторные пределы в точке (0, 0), тем не менее предел функции в этой точке не существует.

3. Доказать непрерывность функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

4. Найти точки разрыва функции $u = \dfrac{1}{\cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y}$.

5. Показать, что в точке (0, 0) функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{(x + y)^3}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y, но разрывна по их совокупности.

6.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные. Пусть дана функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, определенная в области D, и пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — некоторая точка этой области. Зафиксируем значения y и z, положив $y = y_0$, $z = z_0$. В результате получим функцию $u = f(x, y_0, z_0)$ одной переменной x. Если эта функция при $x = x_0$ дифференцируема, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u(M_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется *частной производной* функции $u = f(x, y, z)$ по переменной x в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и обозначается

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \text{ или } \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \text{ или } \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \text{ или } f'_x(M_0).$$

Итак, по определению,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u(M_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}. \quad (6.29)$$

Аналогично частные производные функции f по y и по z в точке M_0 определяются следующим образом:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}; \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u(M_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}. \quad (6.31)$$

Из определения следует, что частная производная — это по сути дела производная функции одной переменной при *фиксированных* остальных переменных, т. е. при частном дифференцировании эти переменные считаются постоянными.

Пример 1. Найти частные производные функции $u = 3x^2yz^3 - 5xz^2 - 4yz + 5x - 3z + 7$ в точке $M_0 = (1, 2, -1)$.

□ Дифференцируя u по x, считая y и z постоянными, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = 6xyz^3 - 5z^2 + 5$. Отсюда $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 6 \cdot 1 \cdot 2 (-1)^3 - 5 (-1)^2 + 5 = -12$.

Аналогично

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = (3x^2z^3 - 4z)\,|_{M_0} = 1;$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = (9x^2yz^2 - 10xz - 4y - 3)\,|_{M_0} = 17. \blacksquare$$

Пример 2. Найти частные производные функции $u = x^{y^z}$.

□ Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{x^z} (\ln x) y^z \ln y. \blacksquare$$

По определению из существования частной производной функции по некоторой переменной следует непрерывность функции по этой переменной. Однако существование всех частных производных функции в точке не гарантирует непрерывности функции в этой точке.

Пример 3. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Из того, что $f(x, 0) = 0$ и $f(0, y) = 0$, следует, что $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$. Однако данная функция, как установлено в примере 6 § 6.2, не является непрерывной в точке $(0, 0)$. $\S$

Дифференцируемость функции. Функция $u = f(x, y, z)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, если в некоторой

окрестности этой точки полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta u(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho), \qquad (6.32)$$

где A, B, C — некоторые постоянные; $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$; $\Delta z = z - z_0$; $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$. Заметим, что ρ есть расстояние между точками $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$.

Выясним смысл коэффициентов A, B, C в равенстве (6.32).

Теорема 6.3 (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то в этой точке существуют частные производные функции по всем переменным, причем

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = B; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = C. \qquad (6.33)$$

□ Для точки $(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ из равенства (6.32)

$$f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

Отсюда, разделив обе части этого равенства на $\Delta x \neq 0$ и учитывая формулу (6.29), имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A.$$

Аналогично доказываются и остальные соотношения (6.33). ■

Итак, из дифференцируемости функции f в точке M_0 следует существование в этой точке всех ее частных производных и для полного приращения функции f в точке M_0 имеет место представление

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z + o(\rho). \qquad (6.34)$$

Кроме того, из равенства (6.32) (или (6.34)) вытекает, что если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, то и $\Delta u \to 0$, т. е. *дифференцируемая в точке M_0 функция f непрерывна в этой точке.*

Однако из непрерывности функций многих переменных в точке M_0, а также из существования ее частных производных в этой точке еще не следует дифференцируемость функции.

Пример 4. Пусть $f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$. Эта функция непрерывна в точке (0, 0). Кроме того, в этой точке имеем

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{0 \cdot |\Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0,$$

т. е. у функции существуют частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$.

Покажем, что тем не менее данная функция не является дифференцируемой к точке (0, 0). Действительно, пусть $y = x$, тогда $f(x, x) = \sqrt{|x|^2} = |x|$, а функция $f(x) = |x|$, как известно, не является дифференцируемой в точке $x = 0$. Отсюда следует, что функция $f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ не является дифференцируемой в точке (0, 0).

Итак, функция $f(x, y) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке (0, 0), имеет частные производные в этой точке и тем не менее не является дифференцируемой в ней.

Получим *достаточные условия дифференцируемости* функции в точке. Для простоты рассуждений ограничимся случаем функции двух переменных.

Теорема 6.4. Если функция $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, то она дифференцируема в точке M_0.

□ Представим полное приращение функции $\Delta z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ в виде

$$\Delta z(M_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \quad (6.35)$$

Каждое из выражений в квадратных скобках есть приращение функции одной переменной: первое — приращение функции $f(x, y_0 + \Delta y)$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, второе — приращение функции $f(x_0, y)$ на отрезке $[y_0, y_0 + \Delta y]$. По теореме Лагранжа о среднем в силу существования производных f'_x и f'_y имеем:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(\xi, y_0 + \Delta y)\Delta x; \quad (6.36)$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)\Delta y,$$

где $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$; $\eta \in [y_0, y_0 + \Delta y]$. Учитывая непрерывность производных f'_x и f'_y в точке M_0, получаем:

$$f'_x(\xi, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x); \quad (6.37)$$

$$f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta y),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$, если $\Delta x \to 0$, и $\beta(\Delta y) \to 0$, если $\Delta y \to 0$. Тогда с учетом равенств (6.36) и (6.37) равенство (6.35) приобретает вид

$$\Delta z(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \quad (6.38)$$

Убедимся, что выражение $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ есть $o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. В самом деле, если $\rho \neq 0$, то $\frac{|\Delta x|}{\rho} \leqslant 1$ и $\frac{|\Delta y|}{\rho} \leqslant 1$. Поэтому

$$|\alpha\Delta x + \beta\Delta y| = \rho\left|\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant \rho\left(|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho}\right) \leqslant \rho(|\alpha| + |\beta|) = o(\rho).$$

Отсюда и из равенства (6.38) получаем, что

$$\Delta z(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + o(\rho),$$

т. е. функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0. ■

Для функции n переменных понятие дифференцируемости в точке вводится аналогично. Именно функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *дифференцируемой в точке* $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\rho), \tag{6.39}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$. Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, называется *непрерывно дифференцируемой* или *гладкой*.

Дифференциал. Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то выражение $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z$, являющееся линейной функцией приращений Δx, Δy, Δz, называется *полным дифференциалом* или просто *дифференциалом* функции f в точке M_0 и обозначается $df(M_0)$ или $du(M_0)$.

Итак, по определению, дифференциал имеет вид

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z \tag{6.40}$$

и является линейной функцией Δx, Δy, Δz. Для независимых переменных x, y и z полагаем $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$; $\Delta z = dz$. Тогда дифференциал (6.40) принимает вид

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}dz. \tag{6.41}$$

Из формул (6.34) и (6.41) вытекает, что

$$\Delta u(M_0) = du(M_0) + o(\rho), \tag{6.42}$$

т. е. полное приращение функции состоит из двух частей — главной части $du(M_0)$ и $o(\rho)$, являющейся бесконечно малой частью при $\rho \to 0$. Поэтому дифференциал функции в точке, если он отличен от нуля, является *главной линейной частью* приращения функции в этой точке.

Пример 5. Найти дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0 = (1, 2)$.

□ Имеем $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}\Big|_{M_0} = \frac{2}{5}$; $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}\Big|_{M_0} = \frac{4}{5}$.

Таким образом, $dz(M_0) = \frac{2}{5}dx + \frac{4}{5}dy$. ■

Выражения $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx$; $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy$; $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}dz$ называются *частными дифференциалами* функции f в точке M_0 и обозначаются $d_x f(M_0)$; $d_y f(M_0)$; $d_z f(M_0)$ соответственно. Тогда полный дифференциал (6.41) равен сумме частных дифференциалов:

$$df(M_0) = d_x f(M_0) + d_y f(M_0) + d_z f(M_0).$$

Для функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ее дифференциал в точке $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется равенством

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \tag{6.43}$$

в котором частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ вычислены в точке M.

Формулу (6.42) можно использовать для приближенного вычисления значений функции. Имеет место приближенное равенство

$$\Delta u(M_0) \approx du(M_0)$$

или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0). \tag{6.44}$$

Пример 6. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2}$.

□ Рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда искомое число можно рассматривать как значение этой функции при $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 4$; $y_0 = 3$; $\Delta x = 0{,}05$; $\Delta y = 0{,}07$. Имеем:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{4}{5}; \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{3}{5}.$$

Тогда по формуле (6.44) получаем

$$\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}05 + \frac{3}{5} \cdot 0{,}07 = 5{,}082. \blacksquare$$

Дифференцирование сложных функций. Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, где в свою очередь x, y и z являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменного t, т. е. $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. Тем самым определена сложная функция $u = f(x(t), y(t), z(t)) = F(t)$ одной переменной t. Найдем производную этой функции в точке t. Придадим переменной t приращение $\Delta t \neq 0$. Оно в свою очередь вызовет приращения функций $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$; $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$; $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$, причем при $\Delta t \to 0$ также $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ в силу дифференцируемости функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а значит, и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ стремится к нулю при $\Delta t \to 0$.

В силу дифференцируемости функции $u = f(x, y, z)$ ее полное приращение Δu в точке $M = (x, y, z)$, согласно равенству (6.34), представим в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + o(\rho), \tag{6.45}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$, а частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ вычислены в точке $(x(t), y(t), z(t))$. Разделив все члены равенства (6.45) на Δt и перейдя в полученном выражении к пределу при $\Delta t \to 0$ в силу дифференцируемости функций x, y, z по переменной t, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial z}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}. \qquad (6.46)$$

Покажем, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\Delta t}=0$. В самом деле,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}=$$

$$=0\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=0.$$

Таким образом, окончательно равенство (6.46) принимает вид

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad (6.47)$$

или

$$u_t'=u_x'\cdot x_t'+u_y'\cdot y_t'+u_z'\cdot z_t'. \qquad (6.48)$$

Равенство (6.47) или (6.48) часто называется *цепочным правилом* дифференцирования сложной функции.

Пример 7. Найти производную u_t' для функции $u=x^2+y^2+z$, если $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=\cos t\cdot\sin t$.

□ Так как $u_x'=2x$; $u_y'=2y$; $u_z'=1$; $x_t'=-a\sin t$; $y_t'=a\cos t$; $z_t'=\cos 2t$, то по формуле (6.48) получаем

$$u_t'=-2ax\sin t+2ay\cos t+\cos 2t=$$

$$=2a^2(-\cos t\sin t+\sin t\cos t)+\cos 2t=\cos 2t.$$

Заметим, что в этом примере подстановка x, y, z в равенство $u=x^2+y^2+z$ дает функцию $u=1+\cos t\sin t$, откуда $u_t'=\cos 2t$. ■

Пример 8. Пусть $u=f(x, y, z)$, где $y=y(x)$; $z=z(x)$. Найти u_x'.

□ Используя формулу (6.48), находим

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}. \qquad (6.49)$$

Формула (6.49) носит название *формулы полной производной*. ■

Пример 9. Дано $z=y^x$; $y=\cos^2 x$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$.

□ Имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$. Полную производную $\dfrac{dz}{dx}$ вычислим по формуле (6.49):

$$\frac{dz}{dx}=y^x\ln y+xy^{x-1}(-\sin 2x)=\cos^{2x}x\ln\cos^2 x-x\sin 2x\cos^{2x-2}x.$$ ■

Пусть теперь задана непрерывно дифференцируемая функция $u=f(x, y, z)$, где в свою очередь $x=x(s, t)$; $y=y(s, t)$; $z=z(s, t)$—

непрерывно дифференцируемые функции переменных s и t. Тем самым определена сложная функция $u = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = \Phi(s, t)$ двух переменных s и t.

Так как при вычислении частных производных функции $\Phi(s, t)$ одна из переменных фиксируется, то этот случай по сути дела сводится к рассмотренному выше, в силу чего формулы для вычисления частных производных $\frac{\partial u}{\partial s}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{6.50}$$

Пример 10. Найти частные производные функции $u = 3x^2y$, где $x = s - t$; $y = st$.

□ Согласно равенству (6.50), имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 6xy + 3x^2t = 6(s - t)\, st + 3(s - t)^2 t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 6xy(-1) + 3x^2s = -6(s - t)\, st + 3(s - t)^2 s. \blacksquare$$

Пример 11. Пусть дана функция двух переменных $u(x, y)$. Перейти к полярным координатам по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и найти $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

□ По формулам (6.50) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \rho \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi. \blacksquare$$

Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция n переменных и $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то цепочное правило, аналогичное правилу (6.48), имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \tag{6.51}$$

Если же $x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, ..., $x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то частные производные $\frac{\partial u}{\partial t_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, согласно формуле (6.50), вычисляются с помощью равенств

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.52}$$

Инвариантность формы первого дифференциала. Рассмотрим дифференциал сложной функции $u = f(x, y, z)$, где $x = x(s, t)$; $y = y(s, t)$; $z = z(s, t)$. Для функции $u = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$

двух независимых переменных s и t ее дифференциал, согласно равенству (6.41), имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial s}\,ds + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt. \tag{6.53}$$

Вычисляя $\frac{\partial u}{\partial s}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ по формулам (6.50), получаем

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt$$

или

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\,ds + \frac{\partial x}{\partial t}\,dt\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\,ds + \frac{\partial y}{\partial t}\,dt\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\,ds + \frac{\partial z}{\partial t}\,dt\right).$$

Выражения в круглых скобках последнего равенства представляют собой полные дифференциалы dx, dy, dz функций x, y и z соответственно. Тогда последнее равенство приобретает вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz. \tag{6.54}$$

Сравнивая дифференциалы (6.54) и (6.41), замечаем, что *полный дифференциал сохраняет свой вид независимо от того, являются ли x, y, z независимыми переменными или являются функциями других независимых переменных.*

В этом и состоит свойство *инвариантности первого дифференциала.* Свойство инвариантности позволяет установить следующие правила исчисления дифференциалов: $d(u+v) = du + dv$;

$$d(uv) = v\,du + u\,dv;\quad d(u/v) = (v\,du - u\,dv)/v^2\ (v \neq 0).$$

Эти формулы справедливы независимо от того, являются u и v независимыми переменными или функциями от других переменных.

Задачи и упражнения

1. Найти частные производные функции $u = f(x, y)$ в точке M_0, если:

а) $u = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$, $M_0 = (3, 2)$;

б) $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$, $M_0 = \left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найти частные производные функций:

а) $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$; б) $u = x\sqrt[4]{z} + zy + \frac{y}{\sqrt[4]{x}}$.

3. Показать, что функция $u = (x-y)(y-z)(z-x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

4. Исходя из определения, доказать дифференцируемость функции $z = x^3y + y^2x$ в любой точке $M = (x, y)$.

5. Найти полный дифференциал функции $u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$.

6. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)$.

7. Радиус основания конуса равен $10{,}2 \pm 0{,}1$, образующая равна $44{,}6 \pm 0{,}1$. Найти объем конуса и указать погрешность подсчета.

8. Найти z'_u и z'_v, если $z = x^2y - y^2x$; $x = u\cos v$; $y = u\sin v$.

9. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{du}{dx}$, если $u = \ln(e^x + e^y)$, $y = x^3$.

6.4. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Производная по направлению. Любое направление l на плоскости или в пространстве характеризуется единичным вектором $l^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы, образованные направлением l с осями X, Y и Z соответственно (рис. 6.11).

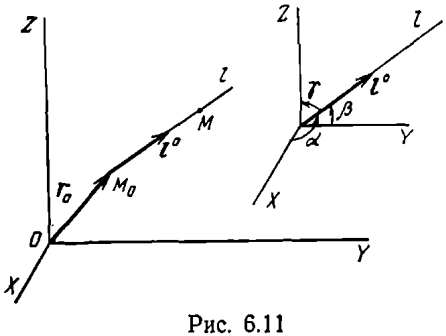


Рис. 6.11

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки M_0, радиус-вектор которой $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(\mathbf{r}_0 + tl^0) - f(\mathbf{r}_0)}{t},$$

то он называется *производной функции* $u = f(x, y, z)$ *в точке* M_0 *по направлению* l и обозначается $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ или $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

Итак, по определению,

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0}\frac{u(\mathbf{r}_0 + tl^0) - u(\mathbf{r}_0)}{t}. \qquad (6.55)$$

Получим координатную форму производной по направлению (6.55). Для этого возьмем луч, выходящий из точки M_0 в направлении l, параметрические уравнения которого имеют вид

$$x = x_0 + t\cos\alpha;\ y = y_0 + t\cos\beta;\ z = z_0 + t\cos\gamma,\ t \geqslant 0.$$

В точках этого луча получим функцию

$$u = f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) = F(t).$$

Тогда, согласно равенству (6.55), имеем

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(+0). \qquad (6.56)$$

Таким образом, производная $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$ совпадает с производной

$F'(+0)$. Если функция $u=f(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в точке M_0, то, применив цепочное правило (6.47), получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \quad (6.57)$$

В частности, для функции $u=f(x, y)$ двух переменных имеем

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

где $l^0=(\cos\alpha, \cos\beta)$; $\beta=\pi/2-\alpha$, α — угол между вектором l^0 и осью X.

Тогда формула производной от непрерывно дифференцируемой функции $u=f(x, y)$ в точке $M_0=(x_0, y_0)$ по направлению l имеет вид

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha. \quad (6.58)$$

Если в качестве направления l взять, к примеру, направление оси X, то $l^0=(1, 0, 0)$. Тогда из формулы (6.57) получаем $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}$, т. е. производная по направлению оси X есть обычная частная производная функции по x. Аналогичный смысл имеют производные по направлениям осей Y и Z. Производная функция в данной точке в данном направлении равна скорости изменения функции в данной точке в заданном направлении.

Пример 1. Температура тела в пространстве задается функцией $T=x^2y+yz-e^{xy}$. Найти скорость изменения температуры в точке $M=(1, 1, 1)$ в направлении от этой точки к началу координат.

□ Найдем координаты вектора l заданного направления. Имеем $l=(-1, -1, -1)$. Тогда $l^0=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Далее

$$\frac{\partial T(M_0)}{\partial x}=(2xy-ye^{xy})\big|_{M_0}=2-e;$$

$$\frac{\partial T(M_0)}{\partial y}=(x^2+z-xe^{xy})\big|_{M_0}=2-e, \frac{\partial T(M_0)}{\partial z}=y\big|_{M_0}=1.$$

Тогда по формуле (6.57) получаем

$$\frac{\partial T(M_0)}{\partial l}=(2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+(2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2e-5}{\sqrt{3}}.$$ ■

Не следует думать, что существование производных функции в данной точке по всем направлениям гарантирует дифференцируемость функции в этой точке.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$u=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y^2}, & (x, y)\neq(0, 0);\\ 0, & (x, y)=(0, 0),\end{cases}$$

являющуюся, очевидно, непрерывной на любой прямой $y = kx$, проходящей через точку (0, 0). Покажем, что она дифференцируема в этой точке по любому направлению. Действительно, согласно формуле (6.56),

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos\alpha \sin\alpha}{t \cos\alpha - t^2 \sin^2\alpha} = 0$$

для любого направления $l^\circ = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Однако рассматриваемая функция не является непрерывной в точке (0, 0), так как она обращается в бесконечность на параболе $x = y^2$ при $(x, y) \neq (0, 0)$. Следовательно, данная функция не может быть дифференцируемой в точке (0, 0), ибо всякая дифференцируемая в точке функция непрерывна в ней.

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.5. Если производная $\partial u(M_0)/\partial l > 0$ ($\partial u(M_0)/\partial l < 0$), то в направлении l функция $u = f(M)$ строго возрастает (убывает) в точке M_0.

□ Если $\partial u(M_0)/\partial l > 0$, то из соотношения (6.56) следует существование отрезка $[0], \varepsilon$ такого, что

$$f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0,\ y_0,\ z_0) > 0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon],$$

т. е. $f(M) > f(M_0)$, где координаты точки M определяются формулами (6.55). Это и означает возрастание функции $f(M)$ в точке M_0. Аналогично рассматривается случай $\partial u(M_0)/\partial l < 0$. ■

Производная вдоль гладкой кривой. *Производной вдоль гладкой кривой* Γ в данной точке $M_0 \in \Gamma$ назовем производную по направлению касательной к кривой, проведенной в точке M_0.

Если $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ — параметрические уравнения кривой Γ, где t — параметр, то, как известно (см. формулу (5.114)), вектор $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ является направляющим вектором касательной к кривой Γ, проведенной в точке $M_0 \in \Gamma$. Тогда величина

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{x'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{y'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{z'(t)}{|\vec{\tau}|}$$ и есть искомая производная

по направлению указанного касательного вектора, т. е. производная вдоль кривой Γ.

Пример 3. Найти производную функции $u = xyz$ вдоль винтовой линии $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = bt$ в точке M_0, отвечающей значению параметра $t = \pi/2$.

□ Имеем $\vec{\tau}(M_0) = (-a\sin t, a\cos t, b)|_{t=\pi/2} = (-a, 0, b)$, $|\vec{\tau}(M_0)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{x'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{y'(t)}{|\vec{\tau}|} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{z'(t)}{|\vec{\tau}|}\right)_{t=\pi/2} =$$

$$= \frac{yz(-a\sin t) + xz(a\cos t) + xyb}{|\vec{\tau}|}\bigg|_{t=\pi/2} = -\frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacksquare$$

Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция n переменных, то *производной ее по направлению l в данной*

точке $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется величина

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_n}\cos\alpha_n,$$

где α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — угол между направлением l и осью X_i пространства $\mathbf{R}^n$; $\mathbf{l}^0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ — орт направления l.

Градиент функции. *Градиентом* дифференцируемой функции $u = f(x, y, z)$ в точке M называется вектор, имеющий координаты $\frac{\partial u(M)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(M)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(M)}{\partial z}$ и обозначаемый символом **grad** u или ∇u. Таким образом, по определению,

$$\mathbf{grad}\, u(M) = \nabla u(M) = \left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{6.59}$$

Из определения (6.57) производной функции по направлению и формулы (6.59) получаем

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = (\mathbf{grad}\, u(M), \mathbf{l}^0) = (\nabla u, \mathbf{l}^0), \tag{6.60}$$

т. е. производная по направлению l в точке M равна скалярному произведению вектора $\mathbf{grad}\, u(M)$ и единичного вектора $\mathbf{l}^0$ направления l. Так как $|\mathbf{l}^0| = 1$, то формулу (6.60) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = |\mathbf{grad}\, u(M)|\cos\varphi = \mathrm{пр}_{\mathbf{l}^0}\, \mathbf{grad}\, u, \tag{6.61}$$

где $\varphi = (\mathbf{grad}\, u(M_0), \widehat{\mathbf{l}^0})$ (рис. 6.12).

Таким образом, *производная в данном направлении равна проекции градиента на направление дифференцирования.* Отсюда следует, что если $\mathbf{grad}\, u(M) \neq 0$, то *производная* $\partial u(M)/\partial l$ *принимает максимальное значение, когда направление* l *совпадает с направлением градиента функции* $u(M)$ ($\varphi = 0$). В этом случае, согласно равенству (6.61), производная функции в точке M по направлению градиента равна

$$\left.\frac{\partial u(M)}{\partial l}\right|_{\mathbf{l}=\mathbf{grad}\, u} = |\mathbf{grad}\, u(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2}. \tag{6.62}$$

В противоположном направлении, задаваемом вектором — $\mathbf{grad}\, u$, производная $\partial u(M)/\partial l$ имеет минимальное значение, равное — $|\mathbf{grad}\, u(M)|$. По остальным направлениям производная $\partial u(M)/\partial l$ принимает промежуточные значения из интервала $(-|\mathbf{grad}\, u(M)|, |\mathbf{grad}\, u(M)|)$.

Итак, если $\mathbf{grad}\, u(M) \neq 0$, то скорость возрастания функции u максимальна и равна $|\mathbf{grad}\, u(M)|$ в направлении вектора $\mathbf{grad}\, u$. В противоположном направлении функция u убывает с максимальной скоростью $-|\mathbf{grad}\, u(M)|$. Поэтому направление l, задаваемое вектором $\mathbf{grad}\, u$, называется *направлением наискорейшего подъема*, а направление, определяемое вектором $(-\mathbf{grad}\, u)$ — *направлением наискорейшего спуска.*

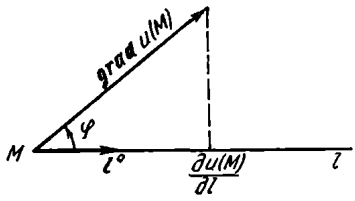


Рис. 6.12

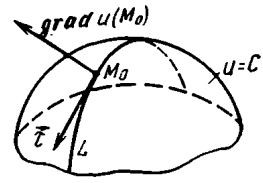


Рис. 6.13

Из установленного геометрического смысла градиента следует, что градиент инвариантен относительно выбора системы координат, ибо и направление, и длина вектора градиента в каждой данной точке не зависит от выбора системы координат.

Пример 4. Плотность распределения вещества в пространстве задается функцией $\rho = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + z^2}$. В каком направлении плотность меняется быстрее всего в точке $M_0 = (-1, 3, 2)$? Определить скорость наибольшего изменения плотности в данной точке.

□ Направление наибольшего возрастания плотности совпадает с направлением $\mathbf{grad}\,\rho = \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \dfrac{\partial \rho}{\partial y}, \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)$. Имеем $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{2x}{1 + z^2}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \dfrac{2y}{1 + z^2}$; $\dfrac{\partial \rho}{\partial z} = -\dfrac{2z\,(x^2 + y^2)}{(1 + z^2)^2}$. Тогда $\mathbf{grad}\,\rho\,(M_0) = \left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$. Итак, в направлении вектора $\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$ плотность возрастает максимально со скоростью, равной $|\mathbf{grad}\,\rho\,(M_0)| = \dfrac{\sqrt{104}}{5}$. ■

Если направление l определяется вектором $\mathbf{a}$, $|\mathbf{a}| \neq 1$, то единичный вектор $\mathbf{l}^0$ этого направления равен $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, и тогда формула (6.60) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{(\mathbf{grad}\,u,\ \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|}. \tag{6.63}$$

Будем говорить, что вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен к поверхности S в данной точке, если он перпендикулярен к любой касательной прямой, проведенной к поверхности в данной точке.

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 6.6. Вектор $\mathbf{grad}\,u(M_0) \neq 0$ перпендикулярен к поверхности (линии) уровня гладкой функции $u = f(x, y, z)$ ($u = f(x, y)$) в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ этой поверхности ($M_0 = (x_0, y_0)$ данной линии).

□ Пусть $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $t \in T$,— произвольная кривая L, проходящая через точку M_0 поверхности уровня $S_l = \{u = f(x, y, z) = C\}$ (рис. 6.13), где $M_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Вектор $\vec{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ направлен по касательной к кривой L. Так как по условию $f(x(t), y(t), z(t)) = C$, $t \in T$, то, дифференцируя это равенство по t, получаем $\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0$ или $(\mathbf{grad}\,u(M_0), \vec{\tau}) = 0$. Это и озна-

чает перпендикулярность вектора $\mathbf{grad}\, u(M_0)$ к вектору касательной $\vec{\tau}$, проведенному к поверхности уровня $u = C$, а значит, и к поверхности уровня S_f. ■

В заключение отметим, что градиент гладкой функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находится по аналогии с формулой (6.59) как вектор

$$\mathbf{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \tag{6.64}$$

и производная функции u по направлению вектора $\mathbf{a}$ определяется равенством (6.63).

Задачи и упражнения

1. Найти скорость изменения функции $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в точке $M_0 = (1, 1, 1)$ в направлении вектора $\mathbf{a} = (8, -4, 8)$.
2. Показать, что функция $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ удовлетворяет соотношению $u = 2\ln 2 - \ln(\mathrm{grad}\, u)^2$, где $(\mathrm{grad}\, u)^2$ — скалярный квадрат.
3. Найти градиент функции $u = f(|\mathbf{r}|)$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
4. Найти наибольшую скорость изменения функции $u = x^y - z$ в точке $M_0 = (2, 2, 4)$.
5. Убедиться в ортогональности поверхностей уровня функций:
   а) $u = x^2 + y^2 - 2z^2$; $v = xyz$;
   б) $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$; $v = x_1x_3 + x_2x_4$; $w = x_1x_4 - x_2x_3$.
6. Найти производную функции $u = u(x, y, z)$ в направлении градиента функции $v = v(x, y, z)$. В каком случае эта производная равна нулю?

6.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Геометрический смысл частных производных функций двух переменных. Пусть дана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$, график которой в пространстве $\mathbf{R}^3$ представляет собой некоторую поверхность S. Пусть далее $M_0 = (x_0, y_0)$ — фиксированная точка из области D определения функции f, а $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, — соответствующая M_0 точка поверхности S.

Известно, что при нахождении частной производной $\partial z(M_0)/\partial x$ переменная y фиксируется так, что $y = y_0$. Геометрически это означает, что через точку $M_0 \in D$ проводится плоскость $y = y_0$, параллельная плоскости XZ, и рассматривается функция $z = f(x, y_0)$ одной переменной x в точке $x = x_0$. Производная этой функции $z'_x(x_0) = \dfrac{\partial z(M)}{\partial x}$ равна тангенсу угла между прямой, параллельной оси X, и касательной к кривой $z = f(x, y_0)$, являющейся линией пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$ (рис. 6.14).

Аналогично частная производная $\partial z(M_0)/\partial y$ равна тангенсу угла между прямой, параллельной оси Y, и касательной к кривой $z = f(x_0, y)$, являющейся линией пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = x_0$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Пусть S — поверхность, определяемая дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$.

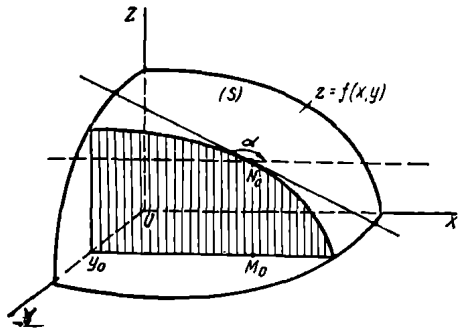


Рис. 6.14

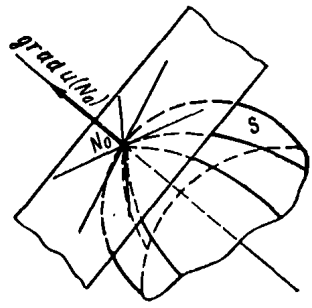


Рис. 6.15

Касательной плоскостью к поверхности S в ее точке N_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через точку N_0 (рис. 6.15).

Поверхность $z = f(x, y)$ является поверхностью уровня $u = 0$ функции $u = z - f(x, y)$. В теореме 6.6 выяснено, что вектор $\mathbf{grad}\, u(N_0)$ перпендикулярен к поверхности уровня $u = 0$, т. е. он перпендикулярен к любой касательной прямой, проведенной к поверхности S в данной точке. Таким образом, вектор $\mathbf{grad}\, u(N_0)$ перпендикулярен к искомой плоскости. Из аналитической геометрии известно, что плоскость, проходящая через точку $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{n} = (A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{6.65}$$

В нашем случае

$$\mathbf{n} = \mathbf{grad}\, u(N_0) = \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(N_0)}{\partial u}, \frac{\partial u(N_0)}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\right),$$

а $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда, согласно равенству (6.65), уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{6.66}$$

Вектор

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\right), \tag{6.67}$$

перпендикулярный к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$, называется *вектором нормали к поверхности к этой точке.*

Нормалью к поверхности S в точке N называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку N_0 (рис. 6.15). Направляющим вектором нормали является вектор (6.67).

В таком случае канонические уравнения искомой нормали имеют вид

$$\frac{x-x_0}{-f'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{-f'_y(x_0,\ y_0)}=\frac{z-z_0}{1}. \tag{6.68}$$

Известно, что поверхность S, определяемая уравнением $F(x, y, z,) = 0$, является поверхностью нулевого уровня функции $u = F(x, y, z)$. Тогда, согласно теореме 6.6, вектор

$$\mathbf{n}=\mathbf{grad}\,u(N_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{N_0} \tag{6.69}$$

является вектором нормали к этой поверхности в точке N_0. В таком случае для поверхности S, задаваемой равенством $F(x, y, z) = 0$, уравнение касательной плоскости, проведенной в точке $N_0 \in S$, имеет вид

$$F'_x(N_0)(x-x_0)+F'_y(N_0)(y-y_0)+F'_z(N_0)(z-z_0)=0, \tag{6.70}$$

а уравнение нормали в этой точке можно записать в каноническом виде

$$\frac{x-x_0}{F'_x(N_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(N_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(N_0)}. \tag{6.71}$$

Пример 1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2y^2$ в точке $N_0 = (2, 0, 4)$.

□ Имеем $\partial z(x_0, y_0)/\partial x = 2x|_{x=2} = 4$; $\partial z(x_0, y_0)/\partial y = -4y|_{y=0} = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости в соответствии с формулой (6.66) имеет вид $z - 4 = 4(x - 2) + 0(y - 0)$ или $4x - z - 4 = 0$, а уравнения нормали, согласно равенствам (6.68), запишутся в виде

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{0}=\frac{z-4}{1}. \ \blacksquare$$

Пример 2. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $N_0=\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}},\ \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

□ Представим уравнение эллипсоида в виде $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. Отсюда $F'_x=\frac{2x}{a^2}$; $F'_y=\frac{2y}{b^2}$; $F'_z=\frac{2z}{c^2}$. Тогда в силу равенств (6.70) уравнение касательной плоскости, проведенной в точке N_0, имеет вид

$$\frac{2}{a\sqrt{3}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{b\sqrt{3}}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{c\sqrt{3}}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0$$

или $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, а, согласно формуле (6.71), $a\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=b\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)=c\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ — уравнения искомой нормали. ■

Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Уравнение касательной, проведенной в точке $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$ к поверхности $z = f(x, y)$, имеет вид (6.66), т. е.

$$\Delta z = f'_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y,$$

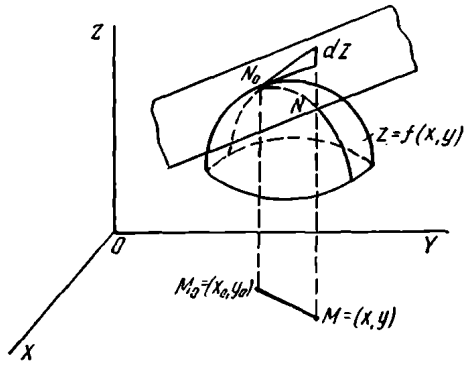


Рис. 6.16

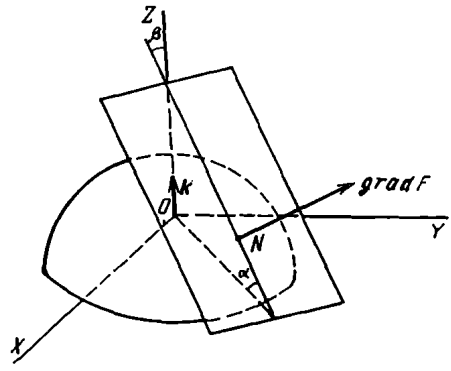


Рис. 6.17

где $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$; $\Delta z = z - z_0$. Правая часть этого равенства, согласно формуле (6.40), является дифференциалом $df(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, а его левая часть — приращением аппликаты касательной плоскости, отвечающей приращениям $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$ независимых переменных x и y.

Таким образом, *дифференциал функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0 = (x_0, y_0)$ *есть приращение аппликаты точки касательной плоскости к поверхности* $z = f(x, y)$ *в точке* $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (рис. 6.16).

Пример 3. Пусть поверхность описывается уравнением $F(x, y, z) = 0$. Найти угол α, который составляет поверхность в данной точке с плоскостью XY (рис. 6.17), т. е. угол между касательной плоскостью, проведенной в данной точке N, и плоскостью XY.

□ Если α — угол, который составляет поверхность склона с плоскостью XY, то $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ есть угол, который составляет поверхность склона с осью Z (рис. 6.17). Вектор $\mathbf{grad}\, F$ ортогонален к касательной плоскости поверхности в данной точке. Значит, он составляет с осью Z (с вектором $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$) угол $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \beta = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \cos\left(\mathbf{grad}\, \widehat{F, \mathbf{k}}\right) = \frac{\partial F}{\partial z}\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Обычно крутизну ската характеризуют величиной $|\operatorname{tg}\alpha|$, т. е.

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\Big/\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right)}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\Big/\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|. \qquad (6.72)$$

Формула (6.72) удобна в том случае, если поверхность склона задана в яв-

ном виде: $z = f(x, y)$. Тогда $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 1$.

Отсюда выводим, что

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \blacksquare \tag{6.73}$$

Пример 4. Найти величину наибольшего подъема поверхности $z - x^2 - 4y^2 = 0$ в точке $N_0 = (2, 1, 8)$.

□ В этом случае $z = x^2 + 4y^2 = f(x, y)$; $\frac{\partial f(N_0)}{\partial x} = 2x\Big|_{x=2} = 4$; $\frac{\partial f(N_0)}{\partial y} = 8y\Big|_{y=1} = 8$. По формуле (6.73) находим $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. ■

Задачи и упражнения

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке N_0:

а) S: $z = \sin x \cos y$; $N_0 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$;

б) S: $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$; $N_0 = (2, 1, 3)$;

в) S: $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$; $N_0 = (2, 2, 1)$.

2. Показать, что касательные плоскости к поверхности $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2.

3. Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $z = y \operatorname{tg}(x/a)$ в точке $(\pi a/4, a, a)$.

6.6. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные высших порядков. Если частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = f(x, y, z)$ в свою очередь являются дифференцируемыми функциями, то можно находить их частные производные.

Для функции $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

называемые *частными производными второго порядка*, обозначаются $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ соответственно.

Точно так же определяются частные производные второго порядка от функций $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, где $u = f(x, y, z)$. Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Аналогично вводятся частные производные третьего порядка. Например, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ означает, что функция u сначала дифференцируется по z, затем по y и, наконец, по x, т. е.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right].$$

Частные производные высших порядков функции u по различным переменным называются *смешанными производными*. Примерами их являются $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и др. Производные высших порядков по одной переменной типа $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial x \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$ и т. д. обозначаются $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и т. д. соответственно. В соответствии с этим, к примеру, производная $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z \partial z}$ обозначается $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2}$. Для обозначения частных производных высших порядков используются и другие символы. Например,

$$u'''_{x^2y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial x \partial y} = u_{x^2y};\quad u^{IV}_{xy^2z} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z} = u_{xy^2z}.$$

Пример 1. Найти все частные производные второго порядка функции $u = \ln(3x - 5y)$.

□ Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{3x-5y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{5}{3x-5y}$. Далее $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{9}{(3x-5y)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{15}{(3x-5y)^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{15}{(3x-5y)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{25}{(3x-5y)^2}$. ■

Пример 2. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$ для функции $u = 2^x \sin(z - y)$.

□ Последовательно находим: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2^x \sin(z-y)\ln 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2^x \cos(z-y)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2^x \cos(z-y)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2^x \sin(z-y)\ln^2 2$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2^x \sin(z-y)\ln^3 2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -2^x \sin(z-y)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -2^x \cos(z-y)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = -2^x \cos(z-y)\ln 2$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = -2^x \cos(z-y)\ln^2 2$; $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = -2^x \cos(z-y)\ln^2 2$. ■

Заметим, что в примере 1 оказались равными производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, а в примере 2 — производные $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$. Этот факт не является случайным. Имеет место следующая теорема о равенстве смешанных производных (6.7), которую мы для простоты выкладок сформулируем и докажем для функции двух переменных.

Теорема 6.7. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M = (x, y)$ непрерывные частные производные второго порядка f''_{xy} и f''_{yx}, то

$$f''_{xy} = f''_{yx}. \tag{6.74}$$

□ Пусть Δx и Δy — приращения аргументов x и y, такие, что точка $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ не выходит из области определения функции f. Составим выражение

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{6.75}$$

Обозначим $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Тогда

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x). \tag{6.76}$$

Применяя к правой части выражения (6.76) теорему Лагранжа о среднем, получим

$$A = \varphi'_x(x + \theta_1 \Delta x)\,\Delta x = [f'_x(x + \theta_1 \Delta x, \quad y + \Delta y) - f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y)]\,\Delta x, \tag{6.77}$$

где $0 < \theta_1 < 1$. В силу существования в точке M непрерывной частной производной f''_{xy} из равенства (6.77) по теореме Лагранжа получим

$$A = f''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x, \; y + \theta_2 \Delta y)\,\Delta x \Delta y, \tag{6.78}$$

где $0 < \theta_2 < 1$.

Переставим в равенстве (6.75) местами средние слагаемые

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]. \tag{6.79}$$

Обозначив $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x - y)$, представим выражение 6.79) в виде

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y). \tag{6.80}$$

Действуя таким же образом, как и раньше, после двукратного применения теоремы о среднем равенство (6.80) приведем к виду

$$A = f''_{yx}(x + \theta_3 \Delta x, \; y + \theta_4 \Delta y)\,\Delta y \Delta x, \tag{6.81}$$

где $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$. Сравнивая выражения (6.78) и (6.81), приходим к равенству

$$f''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x, \; y + \theta_2 \Delta y) = f''_{xy}(x + \theta_3 \Delta x, \; y + \theta_4 \Delta y).$$

Отсюда при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ с учетом непрерывности частных производных f''_{xy} и f''_{yx} приходим к равенству (6.74). ■

Из теоремы 6.7 вытекает следствие: если все последовательно вычисляемые производные являются непрерывными функциями в данной области, то аналогично получаются равенства:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx};$$
$$f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx};$$
$$f^{IV}_{xxyy} = f^{IV}_{xyxy} = f^{IV}_{xyyx} = f^{IV}_{yxyx} = f^{IV}_{yyxx} \qquad \text{и т. д}$$

Итак, при многократном дифференцировании функции многих переменных порядок дифференцирования несуществен, если получающиеся при этом производные являются непрерывными функциями.

Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y имеет непрерывные частные производные высших порядков. Тогда ее дифференциал первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

является по существу функцией четырех переменных x, y, dx и dy. Можно поставить вопрос о нахождении второго дифференциала $d^2z = d(dz)$. Так как при вычислении частных производных по x и по y от dz переменные dx и dy считаются постоянными, то

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dx +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \quad (6.82)$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, кроме того, $dx^2 = dxdx$, $dy^2 = dydy$.

Аналогично находим:

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3; \quad (6.83)$$

$$d^4z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\,dx^4 + 4\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}\,dx^3dy + 6\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}\,dx^2dy^2 + 4\,\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}\,dxdy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\,dy^4$$

и т. д. По индукции можно получить, что

$$d^nz = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,dx^n + C_n^1\,\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}dy}\,dx^{n-1}dy + C_n^2\,\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}dy^2}\,dx^{n-2}dy^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^k\,\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\,dx^{n-k}dy^k + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\,dy^n.$$

Это выражение символически можно записать в виде равенства

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z, \quad (6.84)$$

которое понимают следующим образом: двучлен, находящийся в правой части соотношения (6.84), нужно раскрыть по формуле бинома Ньютона, а затем полученное выражение «умножить» почленно на z, приписав z «множителем» к «числителю» ∂^n «дроби», появившейся в каждом члене. Например,

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^3 z = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy + 3\,\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\,dxdy^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3,$$

что совпадает с равенством (6.83).

Полученные результаты обобщаются на функции любого числа независимых переменных. В частности, для функции $u = f(x, y, z)$ ее n-й дифференциал $d^n u$ символически можно записать в виде

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n u.$$

Заметим, что второй дифференциал функции $z = f(x, y)$ представляет собой квадратичную форму $Q(dx, dy)$ относительно переменных dx и dy. Тогда, согласно равенству (1.210), его можно представить в виде

$$d^2 z = Q(dx, dy) = (dx, dy) H \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

где

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix} --$$

матрица квадратичной формы, называемая *матрицей Гессе**.

Аналогично для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ ее второй дифференциал

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2$$

представляет собой квадратичную форму $Q(dx, dy, dz)$ относительно dx, dy, dz. Тогда

$$d^2 u = Q(dx, dy, dz) = (dx, dy, dz) H \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix},$$

где

$$H = \begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{bmatrix} —$$

матрица Гессе этой формы.

Для функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ее второй дифференциал можно записать в виде

$$d^2 u = Q(\mathbf{dx}) = (\mathbf{dx})^T H (\mathbf{dx}),$$

где $(\mathbf{dx})^T = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ и $H = [a_{ij}] = \left[u''_{x_i x_j}\right]$ — матрица Гессе квадратичной формы, т. е.

---

* Л. О. Гессе (1811—1874) — немецкий математик.

$$H = \begin{vmatrix} u''_{x_1^2} & u''_{x_1x_2} & \dots & u''_{x_1x_n} \\ u''_{x_2x_1} & u''_{x_2^2} & \dots & u''_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u''_{x_nx_1} & u''_{x_nx_2} & \dots & u''_{x_n^2} \end{vmatrix}. \tag{6.85}$$

Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков сложной функции $z = f(x, y)$, где $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

где dx и dy не постоянные, а функции переменных s и t:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s}\,ds + \frac{\partial x}{\partial t}\,dt; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s}\,ds + \frac{\partial y}{\partial t}\,dt.$$

Тогда

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial z}{\partial x}\,d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{dz}{dy}\times$$

$$\times d(dy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dx dy + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y.$$

Сравнивая это выражение с формулой (6.82) для второго дифференциала функции $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y, замечаем, что второй дифференциал d^2z сложной функции свойством инвариантности не обладает. Этот вывод справедлив и для дифференциалов более высоких порядков.

Формула Тейлора для функции многих переменных. Ограничимся рассмотрением функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в δ-окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$ непрерывные частные производные до m-го порядка включительно. Выберем в этой окрестности точку $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и соединим точки M_0 и M отрезком прямой, параметрические уравнения которого имеют вид $x = x_0 + t\Delta x$; $y = y_0 + t\Delta y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

В точках этого отрезка функция $z = f(x, y)$ является функцией одной независимой переменной t:

$$z = f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y) = F(t). \tag{6.86}$$

Составим приращение функции $z = f(x, y)$ в точке M_0:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = F(1) - F(0). \tag{6.87}$$

Так как функция f в окрестности точки M_0 непрерывно дифференцируема m раз, то и функция F имеет на отрезке $[0,1]$ m непрерывных производных. Следовательно, ее можно разложить по формуле Маклорена с остаточным членом по форме Лагранжа:

$$F(t)-F(0)=F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\frac{F'''(0)}{3!}t^3+\ldots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m,$$
$$0<\theta<1.$$

Отсюда при $t=1$ получаем

$$F(1)-F(0)=F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\ldots+\frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{m!}. \quad (6.88)$$

Выразим производные $F^{(k)}(0)$ через производные функции $f(x, y)$ в точке M_0. Из равенства (6.86) имеем

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)}{\partial x}\Delta x+$$
$$+\frac{\partial f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Далее

$$F''(t)=\frac{d}{dt}F'(t)=\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x,\ y_0+\Delta ty)}{\partial x\partial y}\times$$
$$\times\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y).$$

Аналогично найдем

$$F'''(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta x\right)^3 f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y).$$

По индукции можно получить

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),\ k=1, 2, \ldots, m. \quad (6.89)$$

Полагая в формуле (6.89) $t=0$ при $k=1, 2, \ldots, m$, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&F'(0)=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y=df(M_0);\\
&F''(0)=\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2=d^2f(M_0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F^{(m-1)}(0)=d^{m-1}f(M_0).
\end{aligned}\right\} \quad (6.90)$$

При $k=m$ из уравнения (6.89) находим также

$$F^{(m)}(\theta t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0+\theta t\Delta x,\ y_0+\theta t\Delta y)=d^m f(x_0+\theta t\Delta x,$$
$$y_0+\theta t\Delta y).$$

Отсюда при $t=1$ имеем

$$F^{(m)}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0+\theta\Delta x,\quad y_0+\theta\Delta y)=d^m f(x_0+$$
$$+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y). \quad (6.91)$$

Подставляя равенства (6.90), (6.91) в равенство (6.88) с учетом соотношения (6.87), получаем

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = f(M) - f(M_0) = \left[\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 f(M_0)\right] + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m-1} \times\right.$$

$$\left. \times f(M_0)\right] + \frac{1}{m!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)\right]. \quad (6.92)$$

Формула (6.92) называется *формулой Тейлора* функции двух переменных $z = f(x, y)$ *с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Так как в квадратных скобках формулы (6.92), согласно равенствам (6.90) и (6.91), находятся дифференциалы функции f соответствующих порядков, то эту формулу можно переписать в виде

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1} f(M_0) +$$

$$+ \frac{1}{m!}d^m f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y). \quad (6.93)$$

Равенство (6.93) называется *формулой Тейлора* функции $z = f(x, y)$ *в дифференциальной форме.*

Отметим, что для функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющей в окрестности точки $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ непрерывные частные производные до m-го порядка включительно, формула Тейлора в дифференциальной форме имеет вид

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1} f(M_0) + \frac{1}{m!}d^m f(x_1^0 +$$

$$+ \theta\Delta x_1,\ x_2^0 + \theta\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n^0 + \theta\Delta x_n). \quad (6.94)$$

Пример 3. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (0, 0) (до дифференциалов третьего порядка включительно) функцию $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x + y}$.

□ Вычислим частные производные 1-го, 2-го и 3-го порядков данной функции в точке (0, 0):

$f'_x = f'_y = (1 - x - y)^{-2}$, $\quad f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1$;

$f''_{xy} = f''_{yx} = 2(1 - x - y)^{-3}$, $\quad f''_{xy}(0, 0) = 2$;

$f''_{xx} = f''_{yy} = 2(1 - x - y)^{-3}$, $\quad f''_{xx}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = 2$;

$f'''_{x^3} = f'''_{y^3} = f'''_{x^2 y} = f'''_{xy^2} = 6(1 - x - y)^{-4}$, $\quad f'''_{xxx}(0, 0) = \ldots = f'''_{xy^2}(0, 0) = 6$.

По формуле (6.92) получаем ($\Delta x = x$, $\Delta y = y$)

$$\frac{1}{1 - x - y} = 1 + x + y + (x^2 + 2xy + y^2) + (x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3) + R_4(x, y) =$$

$$= 1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3 + R_4(x, y),$$

где $R_4(x, y)$ — остаточный член. ■

Задачи и упражнения

1. Найти z''_{xx}, z''_{xy} и z''_{yy} для функции $z = y \ln x$.

2. Найти u'''_{x^2y} для функции $u = \sin(x + \cos y)$.

3. Показать, что функция $z = g(x) + yg'(x)$ удовлетворяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. Существует ли функция $f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные, такая, что $f'_x = 5y$; $f'_y = 2x$?

5. Найти d^2f для функции $f(x, y) = x^2 \ln y$ и написать соответствующую матрицу Гессе.

6.7. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие неявной функции, определенной одним уравнением, и ее дифференцирование. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой области D, взаимно однозначна, то для нее существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Эта функция определяется из уравнения $y = f(x)$ относительно x.

Рассмотрим теперь более общую задачу о разрешимости уравнения вида $F(x, y) = 0$ относительно x или y, а также аналогичных уравнений, в которых функция F зависит от большего числа переменных.

Из аналитической геометрии известно, что при определенных условиях уравнение $F(x, y) = 0$ задает кривую на плоскости XY. Для получения y как функции от x (или x как функции y) нужно разрешить уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y (или x). В этом случае говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как функцию x (x как функцию y) *неявно* или *в неявном виде*. Разрешив это уравнение, получим функцию вида $y = f(x)$ (или вида $x = \varphi(y)$) в явном виде.

Из определения *неявной функции* $y = f(x)$ $(x = \varphi(y))$ следует, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ $(F(\varphi(y), y) \equiv 0)$.

Естественно возникает вопрос, какие свойства функции F гарантируют существование неявной функции $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. Другими словами, при каких условиях функциональное уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y или x? На этот вопрос отвечает *теорема существования неявной функции*, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 6.8. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Если:

$$1)\ F(x_0, y_0) = 0; \quad 2)\ \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0,$$

то существует окрестность точки (x_0, y_0), в которой уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и единственная непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x)$, такая, что

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \ \forall x \in U_\delta(x_0), \text{ и } y_0 = f(x_0).$$

Выясним геометрический смысл условий теоремы. Уравнение $x^2+y^2-1=0$ определяет на плоскости окружность L с центром в точке (0, 0) радиуса 1. Возьмем на этой окружности точку $M_0=(x_0, y_0)$, такую, что $y_0\neq 0$ (рис. 6.18). Часть окружности L, лежащая в достаточно малой окрестности точки M_0, однозначно проецируется на ось X. Аналитически это означает, что в окрестности точки M_0 уравнение $x^2+y^2-1=0$ однозначно разрешимо относительно y и определяет единственную явную функцию $y=+\sqrt{1-x^2}$ при $y_0>0$ и $y=-\sqrt{1-x^2}$ при $y_0<0$. Заметим, что в этом случае $F'_y(M_0)=2y_0\neq 0$. Кроме того, в точке M_0 существует, очевидно, наклонная касательная.

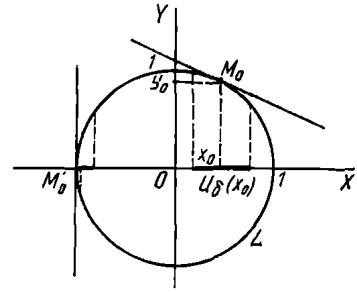


Рис. 6.18

Возьмем теперь точку $M'_0=(-1, 0)$, лежащую на оси X.

Часть окружности, лежащая в любой окрестности точки M'_0, неоднозначно проецируется на ось X. Это означает, что уравнение $x^2+y^2-1=0$ в любой окрестности точки M'_0 не является однозначно разрешимым относительно y. Заметим, что в этом случае $F'_y(M'_0)=0$ и не существует наклонной касательной в точке M'_0 (существует вертикальная касательная).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости неявной функции, определенной уравнением $F(x, y)=0$.

Пусть $F(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $F'_y(x, y)\neq 0$. По теореме 6.8 существует непрерывно дифференцируемая функция $y=f(x)$, определяемая неявно из уравнения $F(x, y)=0$. Тогда производная этой функции вычисляется по формуле

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{6.95}$$

В самом деле, используя формулу (6.49) полной производной, из тождества $F(x, f(x))\equiv 0$ имеем

$$\frac{d}{dx}[F(x, f(x))]=F'_x+F'_y\frac{df}{dx}=F'_x+F'_y y'=0,$$

откуда и следует формула (6.95).

Найдем теперь вторую производную неявной функции. Для этого правую часть формулы (6.95) рассматриваем как сложную функцию и дифференцируем ее по цепочному правилу, заменяя y' на $-F'_x/F'_y$.

Получим

$$y''=-\frac{F'_y\left(F''_{xx}+F''_{xy}y'\right)-F'_x\left(F''_{yx}+F''_{yy}y'\right)}{F'^2_y}=$$

$$= -\frac{F''_{xx}F'^{2}_{y} - 2F''_{xy}F'_{x}F'_{y} + F''_{yy}F'^{2}_{x}}{F'^{3}_{y}}.$$

Аналогично можно вычислить y''', y^{IV} и т. д.

Пример 1. Найти y'_x, если $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

□ Поскольку $F(x, y) = x^2e^{2y} - y^2e^{2x}$, то по формуле (6.95) находим

$$y'_x = -\frac{2xe^{2y} - 2y^2e^{2x}}{2x^2e^{2y} - 2ye^{2x}} = \frac{y^2e^{2x} - xe^{2y}}{x^2e^{2y} - ye^{2x}}. \blacksquare$$

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, в точке (x_0, y_0).

□ Уравнения искомых касательной и нормали имеют вид $y - y_0 = y'(x_0) \times (x - x_0)$ и $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ соответственно. Используя формулу (6.95), запишем уравнение касательной $y - y_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$ или $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$, а уравнение нормали — $y - y_0 = \frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}(x - x_0)$ или

$$F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0. \blacksquare$$

Неявная функция многих переменных, определенная одним уравнением. Аналогично предыдущему вводится понятие неявной функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенной уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$. В частности, уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет при некоторых условиях неявную функцию $z = f(x, y)$ двух переменных x и y.

Для неявных функций многих переменных справедлива теорема, аналогичная теореме 6.8.

Теорема 6.9. Пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0). Если:

$$1)\ F(x_0, y_0, z_0) = 0;\ 2)\ F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то существует окрестность точки (x_0, y_0, z_0), в которой уравнение $F(x, y, z) = 0$ однозначно разрешимо относительно z, т. е. существует окрестность $U_\delta(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) и единственная непрерывно дифференцируемая функция $z = f(x, y)$, такая, что $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$, $\forall (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$, и $z_0 = f(x_0, y_0)$. Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{6.96}$$

Доказательство этой теоремы опускается.

Пример 3. Показать, что уравнение $x + y + z = \sin(xyz)$ имеет единственное решение $z = f(x, y)$ в окрестности точки $(0, 0, 0)$, такое, что $z(0, 0) = 0$. Найти частные производные этого решения в указанной точке.

□ Функция $F(x, y, z) = x + y + z - \sin(xyz)$ непрерывно дифференцируема в точке $(0, 0, 0)$, $F(0, 0, 0) = 0$, $F'_z = (1 - xy\cos(xyz))\big|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$. Тогда по теореме 6.9 существует единственное решение $z = f(x, y)$ уравнения $x + y + z - \sin(xyz) = 0$, которое при $x = 0$ и $y = 0$ принимает значение $z = 0$. Частные производные этой функции в точке $(0, 0)$ найдем по формуле (6.96):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = -\left.\frac{1 - yz\cos(xyz)}{1 - xy\cos(xyz)}\right|_{(0,0,0)} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = -\left.\frac{1 - xz\cos(xyz)}{1 - xy\cos(xyz)}\right|_{(0,0,0)} = -1. \blacksquare$$

Пример 4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

□ Уравнения искомых касательной плоскости и нормали имеют вид

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \text{ и } \frac{x - x_0}{-z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Используя формулу (6.96), получаем уравнение касательной плоскости

$$z - z_0 = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}(x - x_0) - \frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}(y - y_0)$$

или

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

что совпадает с уравнением (6.70), а уравнения нормали —

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)/F'_z(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)/F'_z(M_0)} = \frac{z - z_0}{1} \text{ или } \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

что совпадает с соотношением (6.71). ■

Регулярные отображения. Функция $\mathbf{f}$, отображающая вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$ в вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ из $\mathbf{R}^m$, называется *отображением* из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ и обозначается $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Таким образом, по определению, отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{6.97}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — координатные функции отображения $\mathbf{f}$.

Отображение $\mathbf{f}$ называется дифференцируемым в точке $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ (в области D), если каждая координатная функция $f_1, f_2, \ldots, f_m$ дифференцируема в этой точке (в каждой точке области D), что равносильно существованию частных производных функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, по всем переменным.

Используя условие дифференцируемости (6.39) и определение отображения $\mathbf{f}$, по формуле (6.97) получаем, что дифференцируемость функции $\mathbf{f}$ в точке M_0 равносильна выполнению следующего равенства:

$$\Delta \mathbf{y}(M_0) = \begin{pmatrix} \Delta y_1(M_0) \\ \Delta y_2(M_0) \\ \vdots \\ \Delta y_m(M_0) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n \\ \dfrac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(\rho) \\ o_2(\rho) \\ \vdots \\ o_m(\rho) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \dfrac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(\rho) \\ o_2(\rho) \\ \vdots \\ o_m(\rho) \end{pmatrix},$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o_i(\rho)}{\rho} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

*Матрицей Якоби** называется матрица

$$\left[\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{6.98}$$

Отображение $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ называется *гладким* или непрерывно дифференцируемым, если частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются непрерывными функциями. Гладкое отображение $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ имеет, очевидно, квадратную матрицу Якоби порядка n. Ее определитель называется *якобианом* и обозначается

$$J = J[f_1, f_2, \ldots, f_n] = \left| \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|. \tag{6.99}$$

Отображение $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется *регулярным* в точке M_0 (в области D), если оно гладкое в некоторой окрестности точки M_0 (в каждой точке области D) и якобиан $J(M_0)$ в этой точке отличен от нуля (якобиан в каждой точке области D отличен от нуля).

Заметим, что если якобиан $J(M_0) \neq 0$, то в силу свойства сохранения знака непрерывной функции $J(M)$ существует окрестность $U(M_0)$ точки M_0, такая, что $J(M) \neq 0$, $\forall M \in U(M_0)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.10. Если отображение $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ регулярно в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то существует окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ точки $\mathbf{x}^0$, в которой отображение $\mathbf{f}$ взаимно однозначно.

□ Применив к каждой координатной функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ формулу Тейлора (6.92), при $m = 1$ получим

---

* К. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}^0) \\ f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}^0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{c}_1)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{c}_2)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{c}_2)}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{c}_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}, \qquad (6.100)$$

где точки $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ принадлежат n-мерному отрезку $[\mathbf{x}^0, \mathbf{x}] \in U(\mathbf{x}^0)$. Так как по условию отображение $\mathbf{f}$ регулярно в точке $\mathbf{x}^0$, то $J(\mathbf{x}^0) \neq 0$ и $J(\mathbf{x}) \neq 0$, $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$. В силу непрерывной дифференцируемости отображения $\mathbf{f}$ определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{c}_1)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{c}_1)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{c}_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{c}_2)}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{c}_n)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{c}_n)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$$

является непрерывной функцией от n n-мерных точек $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$. Областью определения функции $A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ служит некоторая ε-окрестность $U_\varepsilon(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0)$, для точек которой условие $\mathbf{c}_i \in U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, эквивалентно условию $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) \in U_\varepsilon(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0)$. Так как $A(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0) = J(\mathbf{x}^0) \neq 0$, то в силу непрерывности функции $A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ существует окрестность $U_\delta(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0) \subset U_\varepsilon(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0)$ точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0)$, такая, что $A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) \neq 0$, $\forall (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) \in U_\delta(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^0)$, т. е. для $\mathbf{c}_i \in U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнено неравенство $A(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) \neq 0$. Значит, матрица в равенстве (6.100) невырождена, откуда и следует взаимная однозначность отображения f. ■

Итак, регулярное отображение $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ взаимно однозначно, следовательно, оно обратимо и существует обратное отображение $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$. Возникает вопрос, является ли отображение $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ регулярным и как связаны между собой матрицы Якоби отображений $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}^{-1}$?

Теорема 6.11. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ — регулярное отображение в точке $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. Тогда обратное отображение $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ является регулярным в точке $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ и матрицы Якоби отображений $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ связаны соотношением

$$\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right] = \left[\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right]^{-1}. \qquad (6.101)$$

□ Так как $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, то

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right](\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\rho), \qquad (6.102)$$

где $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = \left(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0\right)^T$, $\mathbf{o}(\rho) = (o_1(\rho), o_2(\rho), \ldots, o_n(\rho))^T$, $\rho = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \cdots + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2}$.

Умножив обе части равенства (6.102) на матрицу $\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0}$, получим

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}^0=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}^0)=\left[\frac{D(y_1\ y_2,\ \ldots,\ y_n)}{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}\right]^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{y}^0)+$$
$$+\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1} o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|). \qquad (6.103)$$

Покажем, что $\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1} o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|)$ есть $o(\|\mathbf{y}-\mathbf{y}^0\|)$.

В самом деле, так как отображение $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}^0$, то в силу равенства (6.100) имеем

$$y_i-y_i^0=\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\ldots+\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_n}\times$$
$$\times(x_n-x_n^0),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда, применив неравенство Коши — Буняковского, получим ($i=1, 2, \ldots, n$)

$$|y_i-y_i^0|^2\leqslant\left(\left|\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_2}\right|^2+\ldots+\left|\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_n}\right|^2\right)\left((x_1-x_1^0)^2+\right.$$
$$\left.+(x_2-x_2^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2\right).$$

Сложив эти равенства, найдем

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{y}^0\|^2\leqslant(y_1-y_1^0)^2+(y_2-y_2^0)^2+\ldots+(y_n-n_n^0)^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_j}\right|^2\right)\times$$
$$\times\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|^2$$

или $\|\mathbf{y}-\mathbf{y}^0\|\leqslant k\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|$, где $k=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i(\mathbf{c}_i)}{\partial x_j}\right|^2>0$.

Отсюда следует, что $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|=O(\|\mathbf{y}-\mathbf{y}^0\|)$ при $\mathbf{y}\to\mathbf{y}^0$.

В таком случае

$$\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1} o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|)=\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1} o(O(\|\mathbf{y}-$$
$$-\mathbf{y}^0\|))=o(\|\mathbf{y}-\mathbf{y}^0\|).$$

Таким образом, равенство (6.103) при $\mathbf{y}\to\mathbf{y}^0$ имеет вид

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}^0=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}^0)=\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{y}^0)+o(\|y-y^0\|). \qquad (6.104)$$

Сравнивая равенства (6.104) и (6.102), приходим к выводу, что матрицей Якоби обратного отображения $\mathbf{f}^{-1}$ служит матрица $\left[\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{-1}$, т. е. имеет место равенство (6.101). ■

Следствие. Якобианы отображений $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}^{-1}$ связаны соотношением

$$\left|\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| \cdot \left|\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right| = 1. \tag{6.105}$$

Справедливость равенства (6.105) вытекает из свойства определителей обратных матриц и равенства (6.101).

Неявные функции, определяемые системой уравнений, и их дифференцирование. Рассмотрим неявные функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$, определяемые системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0; \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.106}$$

Другими словами, выясним, в каком случае система (6.106) разрешима однозначно относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Приведем для примера линейную систему m уравнений с $m+n$ неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \ldots + b_{1m}y_m = 0; \\ F_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}y_1 + \ldots + b_{2m}y_m = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_m &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{m1}y_1 + \ldots + b_{mm}y_m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.107}$$

Для удобства введем обозначения

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях система (6.107) запишется в виде $A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = 0$. Если определитель $|B| \neq 0$, то $\mathbf{y} = -B^{-1}A\mathbf{x}$, т. е вектор $\mathbf{y}$ однозначно выражается из системы (6.107) через вектор $\mathbf{x}$.

Легко видеть, что $b_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, т. е. B является матрицей Якоби $\left[\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right]$ с определителем (якобианом) $|B| = J(\mathbf{y}) \neq 0$.

Итак, если якобиан $J(\mathbf{y}) \neq 0$, то система (6.107) однозначно разрешима относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ как функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В общем случае справедлива следующая

Теорема 6.12 (о существовании неявной функции). Пусть функции $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$.

Если

$$1)\ F_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ 2)\ \left|\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y, y_2, \ldots, y_m)}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^0}} \neq 0, \tag{6.108}$$

то существует окрестность точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, в которой система (6.106) однозначно разрешима относительно $y_1, y_2, \ldots, y_m$, т. е. существуют окрестности $U(\mathbf{x}^0)$ и $U(\mathbf{y}^0)$ точек $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ соответственно и единственные непрерывно дифференцируемые функции

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n); \\ y_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)), \tag{6.109}$$

такие, что $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \equiv 0$, $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$ и $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.

□ Рассмотрим отображение $\mathbf{z}: \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^{n+m}$:

$$\left.\begin{aligned} &z_1 = F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m);\\ &z_2 = F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &z_m = F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, x_m);\\ &z_{m+1} = x_1;\\ &\ldots\ldots\\ &z_{m+n} = x_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.110}$$

Составим матрицу Якоби отображения (6.110):

$$\left[\frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.111}$$

Вычисляем определитель матрицы (6.111) последовательным разложением по элементам $(m+1)$-й, $(m+2)$-й, ..., $(m+n)$-й строк:

$$\left|\frac{D(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})}{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)}\right| = \left|\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right| \neq 0.$$

Следовательно, отображение $\mathbf{z}$ регулярно. Тогда по теореме 6.11 существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{z}^{-1}$, т. е. система (6.110) разрешима относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$. Поэтому существуют функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$, такие, что

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = f_1(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n});\\ &y_2 = f_2(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n});\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_m = f_m(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n});\\ &x_1 = z_{m+1};\\ &\ldots\ldots\\ &x_n = z_{m+n}. \end{aligned}\right\} \tag{6.112}$$

Так как в точках $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющих системе (6.106), в силу равенств (6.110) выполняются соотношения $z_1 = 0, z_2 = 0, \ldots, z_m = 0$, то из системы (6.112) имеем:

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n);\\ &y_2 = f_2(0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_m = f_m(0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_n) = f_m(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

что и доказывает существование функций (6.109). ■

Вычислим частные производные функций, определенных системой уравнений (6.106). В условиях теоремы 6.12 неявные функции (6.109) подставим в систему (6.106). Получим тождества

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0;\\ &F_2(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_m(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0. \end{aligned}\right\}$$

Дифференцируя каждую функцию этой системы по x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, получаем систему

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = 0;\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x_j} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F_m}{\partial x_j} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = 0,
\end{aligned}\right\}$$

где $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В векторно-матричном виде эту систему можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{Bmatrix} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.113}$$

Вводя обозначения

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{pmatrix};\quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.114}$$

равенство (6.113) перепишем кратко в виде

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} + \left[\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right]\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, n$.

Отсюда с учетом неравенства (6.108) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_j} = -\left[\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right]^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.115}$$

Это и есть формулы для вычисления частных производных неявных функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$, определяемых системой функциональных уравнений (6.106). В частности, если $n = 1$, $m = 1$, то система (6.106) превращается в одно уравнение $F(x, y) = 0$. Если $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, то по формуле (6.115) находим

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_y'},$$

что совпадает с равенством (6.95).

При $n = 2$; $m = 1$, полагая $x_1 = x$; $x_2 = y$; $y_1 = z$, что соответствует неявной функции $z = f(x, y)$, определяемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, из формулы (6.115) находим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'},$$

совпадающие с формулами (6.96).

При $n = 1$; $m = 2$; $x_1 = x$; $y_1 = y$; $y_2 = z$ система (6.106) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0; \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.116}$$

Каждое из уравнений этой системы в пространстве $\mathbf{R}^3$ определяет некоторую поверхность, а сама система — линию пересечения этих поверхностей, рассматриваемую как параметрически заданную кривую вида $x = x$; $y = y(x)$; $z = z(x)$ параметра x.

Если якобиан

$$J(y, z) = \left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6.117}$$

то по формулам (6.115) получаем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что обратная матрица

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right),$$

находим

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{J(y, z)}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & -\dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{J(y, z)} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F_2}{dz} \\ -\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{J(y, z)}\begin{pmatrix} \left|\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right| \\ -\left|\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right| \end{pmatrix},$$

т. е. имеем формулы

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right|}{\left|\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx} = \frac{\left|\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|}{\left|\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|}. \tag{6.118}$$

Пример 5. Для функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, определяемых системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 2x + y + z = 0; \\ F_2(x, y, z) &= x^2 + \sin(yz) = 0, \end{aligned}\right\}$$

найти производные $y'(x)$ и $z'(x)$.

□ $$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z\cos(yz) & y\cos(yz) \end{vmatrix} = (y-z)\cos(yz);$$

$$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2x & y\cos(yz) \end{vmatrix} = 2y\cos(yz) - 2x;$$

$$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2x & z\cos(yz) \end{vmatrix} = 2z\cos(yz) - 2x.$$

По формулам (6.118) находим

$$y'(x) = \frac{2y\cos(yz) - 2x}{(z-y)\cos(yz)},\ z'(x) = \frac{2z\cos(yz) - 2x}{(z-y)\cos(yz)}.$$ ■

Пример 6. Пусть кривая в пространстве определяется системой уравнений (6.116). Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к этой кривой в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

□ При условии (6.117) уравнения (6.116) определяют в пространстве $\mathbf{R}^3$ параметрически заданную кривую в виде $x = x;\ y = y(x);\ z = z(x)$. В качестве направляющего вектора касательной $\vec{\tau} = (x', y', z')$ в нашем случае с учетом соотношений (6.118) можно взять вектор

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(x) = (x', y'(x), z'(x)) = \left(1, -\frac{\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right|}{\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|}, \frac{\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|}{\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|}\right)$$

или коллинеарный ему вектор

$$\vec{\tau}_1 = \left(\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|, -\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right|, \left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|\right). \qquad (6.119)$$

В таком случае, согласно формуле (1.45), уравнение касательной к кривой в точке M_0 имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|} = \frac{y - y_0}{-\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right|} = \frac{z - z_0}{\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|},$$

а уравнение нормальной плоскости в этой точке —

$$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|(x - x_0) - \left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right|(y - y_0) + \left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|(z - z_0) = 0.$$ ■

Задачи и упражнения

1. Доказать, что каждое из данных уравнений определяет неявную функцию $y = f(x)$ в окрестности указанной точки M_0, и найти первую и вторую производные ее в этой точке:

а) $x^2 + xy + y^2 = 7;\ M_0 = (2, 1)$;
б) $xy + \ln xy = 1;\ M_0 = (1, 1)$.

2. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $\frac{3}{4} = \sin^2 x + \cos(y + z)$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$.

3. Вычислить якобиан отображения, определяемого системой

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi;\\ y &= r\sin\theta\sin\varphi;\\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

4. Показать, что $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, если $uv=3x-2y+z$; $v^2=x^2+y^2+z^2$.

5. Под каким углом пересекаются касательные плоскости к поверхностям $x^2+y^2=a^2$ и $bz=xy$ в их точке пересечения?

6. Для кривой $x^2+y^2+z^2=3$; $x+y-z=1$ составить уравнение касательной и нормальной плоскости в точке $M_0=(1,\ 1,\ 1)$.

7. Используя теорему существования неявной функции, выяснить, каким условиям должна удовлетворять в окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ функция $F(x,\ y,\ z)$, чтобы уравнение $F(x,\ y,\ z)=0$ определяло каждую из переменных как дифференцируемую двух переменных. Доказать, что в этом случае справедливо равенство $z'_x\cdot x'_y\cdot y'_z=-1$.

6.8. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

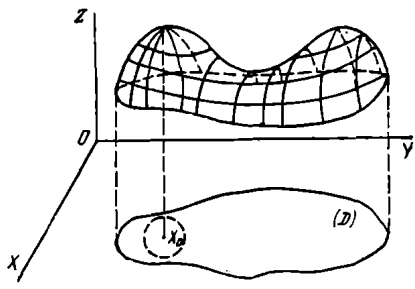


Рис. 6.19

Необходимые условия экстремума. Пусть функция $u=f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, определена на некотором множестве $D\subset\mathbf{R}^n$. Говорят, что функция f имеет во внутренней точке $\mathbf{x}^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ x_n^0)$ *локальный минимум (максимум)*, если существует окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ точки $\mathbf{x}^0$, такая, что

$$f(\mathbf{x}^0)\leqslant f(\mathbf{x})\ \ (f(\mathbf{x}^0)\geqslant f(\mathbf{x})),\ \forall\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}^0). \tag{6.120}$$

Минимум (максимум) функции f в точке $\mathbf{x}^0$ называется *строгим*, если $f(\mathbf{x}^0)<f(x)$ $(f(\mathbf{x}^0)>f(\mathbf{x}))$ при $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}^0$ (рис. 6.19). Точки (строгого) минимума и максимума функции называются точками (строгого) *экстремума*.

Теорема 6.13 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $u=f(\mathbf{x})$ имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум, то в этой точке выполняются равенства

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}=0, \tag{6.121}$$

т. е.

$$df(\mathbf{x}^0)=0. \tag{6.122}$$

□ Покажем, что в точке экстремума $\mathbf{x}^0$ выполнены равенства $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}=0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Зафиксируем переменные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{j-1}$, $x_{j+1},\ \ldots,\ x_n$, полагая $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $x_{j-1}=x_{j-1}^0$, $x_{j+1}=x_{j+1}^0$, $\ldots$, $x_n=x_n^0$, и рассмотрим функцию одной переменной x_j: $u=f(x_1^0,\ \ldots,\ x_{j-1}^0,\ x_j,\ x_{j+1}^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Эта функция в точке $x_j=x_j^0$ имеет, согласно

условию, экстремум. По необходимому условию экстремума функций одной переменной следует, что $\frac{du\left(x_j^0\right)}{dx_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j} = 0$, что и доказывает справедливость равенств (6.121), равносильных одному равенству (6.122). ■

Точки $\mathbf{x} \in D$, в которых выполнены равенства (6.121), называются *стационарными* точками функции f.

Условия (6.121) не являются достаточными для существования в точке $\mathbf{x}^0$ экстремума функции f. Так, например, для функции $u = x^4y^3$ стационарной точкой является точка (0, 0). Однако в этой точке экстремум отсутствует, ибо в любой ее окрестности $u(x, y) - u(0, 0) = x^4y^3$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Достаточные условия экстремума. Пусть функция $u = f(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Представим эту функцию в окрестности точки $\mathbf{x}$ формулой Тейлора

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = df(\mathbf{x}^0) + \frac{1}{2!} d^2f(\mathbf{x}^0 + \theta\Delta\mathbf{x}), \tag{6.123}$$

где $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$, $0 < \theta < 1$.

Теорема 6.14 (достаточные условия экстремума). Пусть $\mathbf{x}^0$ — стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции f. Если $d^2f(\mathbf{x}^0) > 0$ $(d^2f(\mathbf{x}^0) < 0)$, то в точке $\mathbf{x}^0$ функция f имеет строгий локальный минимум (максимум).

□ Так как в стационарной точке выполнены равенства (6.122), то формула Тейлора (6.123) принимает вид

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2} d^2f(\mathbf{x}^0 + \theta\Delta\mathbf{x}). \tag{6.124}$$

В силу непрерывности вторых частных производных функции f существует окрестность точки $\mathbf{x}^0$, в которой дифференциал $d^2f(\mathbf{x})$ имеет знак дифференциала $d^2f(\mathbf{x}^0)$. Поэтому если $d^2f(\mathbf{x}^0) > 0$ $(d^2f(\mathbf{x}^0) < 0$, то в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}^0$ и $d^2f(\mathbf{x}^0 + \theta\Delta\mathbf{x}) > 0$ $(d^2f(\mathbf{x}^0 + \theta\Delta\mathbf{x}) < 0)$. Следовательно, в этой окрестности $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) > 0$ $(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) < 0)$, т. е., согласно определению (6.120), в точке $\mathbf{x}^0$ функция имеет локальный минимум (максимум). ■

Итак, условия

$$\begin{aligned} &1)\ df(\mathbf{x}^0) = 0; \\ &2)\ d^2f(\mathbf{x}^0) > 0 \ \ (d^2f(\mathbf{x}^0) < 0) \end{aligned} \tag{6.125}$$

являются достаточными условиями локального минимума (максимума) дважды непрерывно дифференцируемой функции f в точке $\mathbf{x}^0$.

Используя матрицу Гессе (6.85), дифференциал $d^2f(\mathbf{x}^0)$, представляющий собой квадратичную форму переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, можно записать в виде $d^2f(\mathbf{x}^0) = (d\mathbf{x})^T H d\mathbf{x}$, где $(d\mathbf{x})^T = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, а H — матрица Гессе. Отсюда следует, что $d^2f(\mathbf{x}^0) > 0$ $(d^2f(\mathbf{x}^0) < 0)$ тогда и только тогда, когда матрица Гессе H квадратичной формы $d^2f(\mathbf{x}^0)$ положительно (отрицательно) определена. В си-

лу критерия Сильвестра (теорема 1.37) матрица H положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_1} > 0; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_3 \partial x_3} \end{vmatrix} > 0, \ldots, |H|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} > 0,$$

и отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1^2} < 0 \quad \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{matrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} > 0 \quad \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{matrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} < 0, \ldots,$$

$$(-1)^n |H|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} > 0.$$

Таким образом, *достаточными условиями локального минимума (максимума)* дважды непрерывно дифференцируемой функции f в точке $\mathbf{x}^0$ являются:

$$1) \ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} = 0; \tag{6.126}$$

2) матрица Гессе H положительно (отрицательно) определена.

Сформулируем теперь эти условия для функций двух и трех переменных

Пусть $z = f(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$. Тогда условия:

$$1) \ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0; \tag{6.127}$$

2) матрица $H = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) \end{bmatrix}$ положительно (отрицательно) определена — гарантируют существование в точке M_0 строгого локального минимума (максимума) функции $f(x, y)$.

Другими словами, достаточными условиями локального минимума функции $f(x, y)$, имеющей вторые непрерывные производные, в точке M_0 являются:

$$1) \ f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0;$$
$$2) \ f''_{xx}(M_0) > 0, \ f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - f''^2_{xy}(M_0) > 0,$$

а достаточными условиями локального максимума —

$$1) \ f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0;$$
$$2) \ f''_{xx}(M_0) < 0, \ f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - f''^2_{xy}(M_0) > 0.$$

Аналогично для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ условия:

$$1) \ \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 0; \tag{6.128}$$

2) матрица $H=\begin{bmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{z^2}(M_0) \end{bmatrix}$ положительно (отрицательно) определена—гарантируют наличие строгого локального минимума (максимума) функции $u=f(x, y, z)$ в точке $M_0=(x_0, y_0, z_0)$.

Выясним *условия отсутствия экстремума* в стационарной точке.

Теорема 6.15. Если в стационарной точке $\mathbf{x}^0$ дифференциал второго порядка $d^2f(\mathbf{x}^0)=(dx)^T Hdx$ не определен по знаку, то в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум функции f отсутствует.

Доказательство теоремы следует из равенства (6.124) и рассуждений, аналогичных рассуждениям при доказательстве теоремы 6.14.

Так, для функции двух переменных $z=f(x, y)$ достаточные условия отсутствия экстремума в точке M_0 равносильны условию

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) \end{vmatrix} = f''_{x^2}(M_0)\, f''_{y^2}(M_0) - f''^{2}_{xy}(M_0) < 0. \qquad (6.129)$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z=3xy-x^3-y^3$.

□ Находим частные производные $z'_x=3y-3x^2$ и $z'_y=3x-3y^2$.

Решая систему $\left.\begin{array}{l} z'_x=3y-3y^2=0; \\ z'_y=3x-3y^2=0, \end{array}\right\}$ находим стационарные точки $M_1=(0,0)$ и $M_2=(1, 1)$ искомой функции. Составляем матрицу Гессе

$$H(x, y)=\begin{bmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{bmatrix}.$$

В стационарной точке $M_1=(0, 0)$ имеем

$$H(M_1)=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ откуда } |H(M_1)|=-9<0.$$

Согласно условию (6.129), заключаем, что в точке (0, 0) экстремум отсутствует.

В стационарной точке $M_2=(1, 1)$ аналогично находим

$$H(M_2)=\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow -6<0, \quad \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}=27>0,$$

т. е. матрица $H(M_2)$ отрицательно определена. Согласно условию (6.126), в точке (1, 1) искомая функция имеет локальный максимум. ■

Замечание. Если в стационарной точке $\mathbf{x}^\circ$ второй дифференциал не удовлетворяет критерию Сильвестра, то вопрос о наличии локального экстремума функции f в точке $\mathbf{x}^\circ$ остается открытым. В этом случае необходимы дополнительные исследования.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z=(y-x)^2+(y+2)^3$.

□ Из системы

$$\left.\begin{array}{l} z'_x=2(y-x)(-1)=0; \\ z'_y=2(y-x)+3(y+2)^2=0 \end{array}\right\}$$

находим единственную стационарную точку (—2, —2). Составляем матрицу Гессе

$$H(x, y)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 14+6y \end{bmatrix} \Rightarrow H(-2, -2)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Так как $2>0$, $|H(-2, -2)|=0$, $d^2f(-2, -2)=0$ и, значит, вопрос об экстремуме остается открытым, нужны дополнительные исследования. Поскольку

ку $f(-2, -2) = 0$, то достаточно исследовать знак $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $(-2, -2)$.

На прямой $y = x$ знак функции $z = (y - x)^2 + (y + 2)^3$ определяется знаком второго слагаемого $(y + 2)^3$. Очевидно, если $y < -2$, то $(y + 2)^3 < 0$, если же $y > -2$, то $(y + 2)^3 > 0$.

Следовательно, в любой окрестности точки $(-2, -2)$ есть как положительные, так и отрицательные значения функции. Значит, в точке $(-2, -2)$ экстремума нет. ■

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^2$.

□ Из системы $z'_x = 4x^3 = 0$; $z'_y = 2y = 0$ находим, что точка $(0, 0)$ является стационарной. Далее

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в стационарной точке $d^2f(0, 0) = 0$. Но, очевидно, $z(0,0)$ является минимумом данной функции. ■

Метод наименьших квадратов. Важное практическое значение имеет следующая задача. Пусть требуется установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами x и y по результатам экспериментальных измерений, приведенных в таблице

X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n

Другими словами, надо подобрать функцию $y = f(x)$ так, чтобы ее значения были в некотором смысле как можно более близкими к экспериментальным значениям y. Выбор функции $y = f(x)$ зависит как от теоретических исследований, так и от характера расположения на плоскости XY экспериментальных точек (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Часто в практических работах ограничиваются линейной функцией $y = ax + b$, где коэффициенты a и b подлежат определению.

Так как в эксперименте с номером i, $i = 1, 2, \ldots, n$, для данного x_i приближенное значение y равно $\hat{y}_i = ax_i + b$, то разность $\delta_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (ax_i + b)$ есть, очевидно, погрешность, возникающая при замене экспериментального значения y_i приближенным $\hat{y}_i$.

По методу наименьших квадратов коэффициенты a и b находятся из условия минимальности суммы квадратов погрешностей по всей совокупности экспериментов. Таким образом, задача нахождения параметров a и b сводится к нахождению минимума функции двух переменных

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Из необходимых условий экстремума (6.121) имеем:

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i [y_i - ax_i - b] = 0;$$

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - ax_i - b] = 0.$$

Отсюда получаем систему

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

которая называется *нормальной системой метода наименьших квадратов*. Решая ее, находим числа a и b искомой зависимости $y = ax + b$.

Убедимся с помощью достаточных условий экстремума (6.127), что функция $S(a, b)$ в точке $M_0 = (a, b)$ имеет минимум.

В самом деле, матрица Гессе

$$H = \begin{bmatrix} S''_{aa} & S''_{ab} \\ S''_{ba} & S''_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum_{i=2}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{bmatrix}.$$

Так как $2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$; $|H| = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \right.$

$$\left. - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) = 4n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) =$$

$$= 4n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0,$$ то отсюда следует, что функция $S(a, b)$ имеет минимум в точке M_0.

Необходимые условия экстремума неявно заданных функций. Пусть неявная функция $z = f(x, y)$ определена уравнением $F(x, y, z) = 0$. Так как производные z'_x и z'_y определяются в этом случае равенствами (6.96), то из равенств (6.121) получаем, что необходимыми условиями экстремума неявно заданной функции $z = f(x, y)$ являются условия

$$z'_x = -F'_x/F'_z = 0; \quad z'_y = -F'_y/F'_z = 0$$

или

$$F'_x(x, y, z) = 0; \; F'_y(x, y, z) = 0.$$

К этим равенствам необходимо присоединить исходное уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяет стационарная точка.

Таким образом, окончательно получаем, что в рассматриваемом случае стационарные точки определяются системой

$$\left.\begin{aligned} F'_x(x,\ y,\ z) &= 0; \\ F'_y(x,\ y,\ z) &= 0; \\ F(x,\ y,\ z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.130)$$

Вопрос же о характере экстремума неявно заданной функции в стационарной точке решается с помощью достаточных условий, изложенных выше.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x,\ y)$, неявно заданную уравнением $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

□ Составляем систему (6.130):

$$z'_x = 4x + 8z = 0;$$
$$z'_y = 4y = 0;$$
$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0,$$

откуда находим стационарные точки $M_1 = (-2,\ 0,\ 1)$ и $M_2 = \left(\frac{16}{7},\ 0,\ -\frac{8}{7}\right)$.

Вычисляем далее вторые производные

$$z''_{x^2} = 4 + 8z'_x = 4 + 8(4x + 8z) = 4 + 32x + 64z;$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = 0; \quad z''_{y^2} = 4.$$

Составляем матрицу Гессе

$$H(M_1) = \begin{bmatrix} z''_{x^2}(M_1) & z''_{xy}(M_1) \\ z''_{yx}(M_1) & z''_{y^2}(M_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Так как $4 > 0$, $|H(M_1)| > 0$, то отсюда следует, что в точке M_1 функция имеет локальный минимум. Аналогично получим, что M_2 — тоже точка локального минимума этой функции ($H(M_2) = H(M_1)$). ■

Задачи и упражнения

1. Исследовать на экстремум функцию:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$;

б) $u = y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 8yz - 12x - 6y - 2z + 3$;

в) $u = -x^2 - y^2 - 10z^2 + 4xz + 3yz - 2x - y + 13z + 5$.

2. Исследовать на экстремум функцию, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

6.9. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Понятие условного экстремума. Рассмотрим следующую задачу: найти экстремум функции $z = ax + by$ при условии, что x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = R^2$. Геометрически это означает следующее: на линии L (эллипс) пересечения плоскости $z = ax + by$ и цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ найти максимальное или минимальное значение аппликаты (рис. 6.20). Поставленную задачу можно решить следующим образом. Из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ находим $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $|x| \leqslant R$. Подставляя найденное значение y в уравнение плоскости, получаем функции одной переменной x: $z = ax \pm b\sqrt{R^2 - x^2}$, $|x| \leqslant R$. Тем самым задача о нахождении экстремума функции $z = ax + by$ при условии, что $x^2 + y^2 = R^2$, свелась к задаче нахождения экстремумов функций $z = ax \pm b\sqrt{R^2 - x^2}$ одной

переменной x на отрезке $[-R, R]$, которую можно решить методами, изложенными в ч. I данного пособия. Из теоремы Вейерштрасса следует, что экстремум этих функций существует (рис. 6.20).

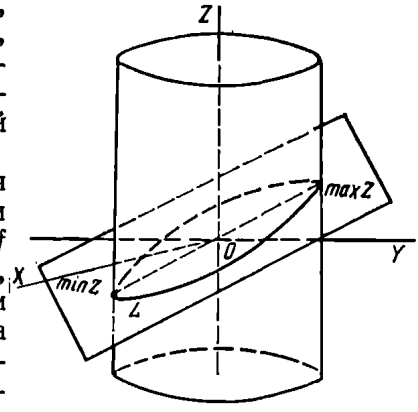


Рис. 6.20

Рассмотренная задача является частным случаем более общей задачи об отыскании экстремума функции f при условии, что ее аргументы x_1, x_2, ..., x_n удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Наша цель заключается в нахождении такого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который максимизирует или минимизирует $f(\mathbf{x})$. По этой причине f называется *целевой функцией*.

Итак, рассмотрим задачу о нахождении экстремума целевой функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии, что переменные x_1, x_2, ..., x_n подчиняются m ограничениям ($m \leqslant n$):

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0; \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6.131)$$

называемым *условиями связи* или просто *связями*.

Будем говорить, что точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, удовлетворяющая уравнениям (6.131), является точкой *локального условного максимума (минимума)*, если существует окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ точки $\mathbf{x}^0$, такая, что для всех точек $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$, удовлетворяющих связям (6.131), выполняется неравенство

$$f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0) \quad (f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)).$$

Метод множителей Лагранжа. Пусть точка $\mathbf{x}^0$ удовлетворяет уравнениям связи (6.131). Предположим, что в этой точке ранг матрицы Якоби $\left[\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n}\right]$ равен m. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что в этом случае минор m-го порядка

$$\left|\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{dF_2}{\partial x_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (6.132)$$

Тогда на основании теоремы 6.12 существования неявных функций из условий (6.131) переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно выразить явно в виде функций от $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

Составим вспомогательную функцию

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = L(\mathbf{x}; \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_1 F_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m F_m(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(\mathbf{x}), \quad (6.133)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m$,— некоторые числа. Функция $L(\mathbf{x}, \lambda)$ называется *функцией Лагранжа*, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — множителями Лагранжа, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 6.16 (необходимое условие условного экстремума). Пусть функции $f, F_1, F_2, \ldots, F_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, удовлетворяющей условиям связи (6.131). Если функция f в точке $\mathbf{x}^0$ принимает экстремальное значение и в этой точке

$$\operatorname{rang}\left[\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right] = m,$$

то существуют числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$, такие, что выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L(\mathbf{x}^0; \lambda^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 0;\\
&\frac{\partial L(\mathbf{x}^0; \lambda^0)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial L(\mathbf{x}^0; \lambda^0)}{\partial x_n} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) = 0;\\
&\frac{\partial L(\mathbf{x}^0; \lambda^0)}{\partial \lambda_1} = F_1(\mathbf{x}^0) = 0;\\
&\frac{\partial L(\mathbf{x}^0; \lambda^0)}{\partial \lambda_2} = F_2(\mathbf{x}_0) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial L(\mathbf{x}^0; \lambda^0)}{\partial \lambda_m} = F_m(\mathbf{x}^0) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (6.135)$$

где $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0)$.

□ Сформулированную теорему докажем для функций двух переменных $u = f(x, y)$ с условием связи $F(x, y) = 0$. В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y), \quad (6.136)$$

а условие (6.134) в точке (x_0, y_0) равносильно неравенству $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, такая, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y = g(x)$, $x \in U(x_0)$. Подставив ее в целевую функцию $u = f(x, y)$, получим функцию $u = f(x, g(x))$ одной переменной x, экстремум которой достигается во внутренней точке x_0 множества $U(x_0)$. Тогда в этой точке должно выполняться равенство

$$u'_x(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} = 0. \tag{6.137}$$

Согласно формуле (6.95), $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ и равенство (6.137) принимает вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0. \tag{6.138}$$

Из уравнения $F(x, y) = 0$ следует, что $F'_x + F'_y y'_x = F'_x - F'_y \times$ $\times \frac{F'_x}{F'_y} \equiv 0$. Поэтому, умножив это тождество на произвольное число λ и сложив полученное равенство с равенством (6.138), будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda F'_y\right)\frac{F'_x}{F'_y} = 0. \tag{6.139}$$

По условию $F'_y \neq 0$. В таком случае число λ можно выбрать так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{6.140}$$

При выбранном таким образом параметре λ равенство (6.139) приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{6.141}$$

Следовательно, в точке экстремума выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= f'_x + \lambda F'_x = 0; \\ L'_y &= f'_y + \lambda F'_y = 0; \\ L'_\lambda &= F(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \blacksquare \tag{6.142}$$

Точка $(\mathbf{x}^0; \lambda^0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$, удовлетворяющая равенствам (6.135), называется *стационарной точкой* функции L при наличии связей (6.131).

Итак, чтобы найти стационарную $(n + m)$-мерную точку $(x^0; \lambda^0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0)$ функции L при наличии связей (6.131), нужно составить функцию Лагранжа (6.133) и решить систему $(n+m)$ уравнений (6.135) с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Выясним теперь достаточные условия существования экстремума функции f в точке $\mathbf{x}^0$ при связях (6.131). Получим эти условия для функции двух переменных $u = f(x, y)$ при связи $F(x, y) = 0$.

Теорема 6.17 (достаточные условия экстремума функции при наличии связей). Пусть функции f и F — дважды непрерывно дифференцируемые в окрестности стационарной точки $(x_0, y_0; \lambda_0)$ функции Лагранжа $L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$. Тогда если

$$\begin{cases} d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) < 0; \\ F(x_0, y_0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} d^2L(x_0, y_0; \lambda_0) > 0; \\ F(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \tag{6.143}$$

то в точке (x_0, y_0) функция $u = f(x, y)$ имеет локальный условный максимум (минимум) при связи $F(x, y) = 0$.

□ Представим функции $f(x, y)$ и $F(y, x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0). Имеем:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2f(x_0, y_0) + o_1(\rho^2);$$

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = dF(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2F(x_0, y_0) + o_2(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o_i(\rho^2)}{\rho^2} = 0$, $i = 1, 2$.

Умножив второе равенство на постоянный множитель λ и сложив полученный результат с первым равенством, с учетом соотношения (6.136) получим

$$L(x, y; \lambda) - L(x_0, y_0; \lambda) = dL(x_0, y_0; \lambda) + \frac{1}{2} d^2L(x_0, y_0) + o(\rho^2), \tag{6.144}$$

где $o(\rho^2) = o_1(\rho^2) + \lambda o_2(\rho^2)$.

В стационарной точке $(x_0, y_0; \lambda_0)$ имеем $dL(x_0, y_0; \lambda_0) = 0$. Поэтому в окрестности этой точки равенство (6.144) принимает вид

$$L(x, y; \lambda_0) - L(x_0, y_0; \lambda_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2L(x_0, y_0) + o(\rho^2), \tag{6.145}$$

так как при $F(x, y) = 0$ функция $L(x, y; \lambda) = f(x, y)$. Отсюда в силу непрерывности вторых частных производных функций f и F существует окрестность точки (x_0, y_0), в которой дифференциал $d^2L(x, y)$ имеет знак дифференциала $d^2L(x_0, y_0)$. Эту окрестность можно выбрать такой, что слагаемое $o(\rho^2)$ в формуле (6.145) не будет влиять на знак дифференциала $d^2L(x_0, y_0)$. Тогда из равенства (6.145) получаем, что если $d^2L(x_0, y_0) < 0$ ($d^2L(x_0, y_0) > 0$), то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет локальный условный максимум (минимум). Тем самым справедливость достаточных условий (6.143) установлена. ■

Покажем теперь, что достаточные условия (6.143) условного экстремума функции f равносильны следующим:

$$\begin{aligned} &\left(1, -F'_x/F'_y\right) \begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -F'_x/F'_y \end{pmatrix} < 0 \text{ — условный максимум;} \\ &\left(1, -F'_x/F'_y\right) \begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -F'_x/F'_y \end{pmatrix} > 0 \text{ — условный минимум.} \end{aligned} \tag{6.146}$$

Действительно, второй дифференциал d^2L представляет собой квадратичную форму

$$d^2L = (dx, dy)\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \tag{6.147}$$

в которой дифференциалы dx и dy связаны соотношением

$$F'_x dx + F'_y dy = 0, \tag{6.148}$$

следующим из условия связи $F(x, y) = 0$. Найдя из равенства (6.148) дифференциал $dy = -(F'_x/F'_y)\,dx$ и подставив его в равенство (6.147), получим

$$d^2L = dx^2\,(1, -F'_x/F'_y)\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -F'_x/F'_y \end{pmatrix}.$$

Так как $dx^2 > 0$, то из этого равенства и следует, что условие (6.143) равносильно условию (6.146). ■

Заметим, что если неравенство (6.146) умножить на $F'^2_y > 0$, то достаточные условия экстремума при заданных связях приобретают вид: $Q < 0$ — условный максимум; $Q > 0$ — условный минимум,

$$Q = (F'_y, -F'_x)\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} F'_y \\ -F'_x \end{pmatrix}. \tag{6.149}$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2a^2$.

□ Составим функцию Лагранжа $L(x, y; \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2a^2)$. Из системы

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0; \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0; \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2a^2 = 0 \end{cases}$$

находим стационарные точки $\left(a, a; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(a, -a; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-a, a; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-a, -a; -\frac{1}{2}\right)$ функции L. Это значит, что точками возможного локального условного экстремума функции $z = xy$ являются точки $M_1 = (a, a)$; $M_2 = (a, -a)$; $M_3 = (-a, a)$; $M_4 = (-a, -a)$.

Вычислим значение Q в точке M_1. Имеем:

$$(F'_y, -F'_x)\big|_{M_1} = (2y, -2x)\big|_{M_1} = (2a, -2a);$$

$$\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix}_{M_1} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix}_{M_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q(M_1) = (2a, -2a)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2a \\ -2a \end{pmatrix} = (2a, -2a)\begin{pmatrix} -4a \\ 4a \end{pmatrix} = -16a^2 < 0,$$

т. е. в точке M_1 функция $z = xy$ имеет условный локальный максимум, равный $z_{max} = a^2$.

Аналогично найдем, что $Q(M_2) = Q(M_3) = 16a^2 > 0$, $Q(M_4) = -16a^2 < 0$,

т. е. в точках M_2 и M_3 функция $z = xy$ имеет условный локальный минимум, а в точке M_4 — максимум. ■

Сформулируем теперь без доказательства достаточные условия локального экстремума функции трех переменных при наличии одной или двух связей.

Пусть ищется экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при связи $F(x, y, z) = 0$, т. е. требуется найти экстремум функции f в точках поверхности $F(x, y, z) = 0$. В этом случае достаточное условие экстремума функции f в стационарной точке $(x_0, y_0, z_0; \lambda_0)$ функции Лагранжа $L(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$ может быть сформулировано в следующем виде: если матрица

$$Q = \begin{bmatrix} -F'_z & 0 & F'_x \\ 0 & -F'_z & F'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F'_z & 0 \\ 0 & -F'_z \\ F'_x & F'_y \end{bmatrix} \tag{6.150}$$

положительно (отрицательно) определена, то в точке (x_0, y_0, z_0) функция $u = f(x, y, z)$ имеет локальный условный минимум (максимум).

Пусть поставлена задача о нахождении экстремумов функции $u = f(x, y, z)$ при связях $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, т. е. определяются экстремумы функции f в точках линии пересечения поверхностей $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$.

Если в стационарной точке функции Лагранжа

$$L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z)$$

матрица

$$Q = \left(\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}, -\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}, \frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} \right) \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \\ -\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)} \\ \dfrac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} \end{pmatrix} \tag{6.151}$$

положительно (отрицательно) определена, то в точке (x_0, y_0, z_0) функция $u = f(x, y, z)$ имеет условный минимум (максимум).

Пример 2. Найти точку $M = (x, y, z)$, ближайшую к началу координат и лежащую на прямой $x + 2y + 3z = 10$; $x - y + 2z = 1$.

□ По условию задачи требуется найти минимум квадрата расстояния $d^2 = |OM|^2$, т. е. требуется минимизировать функцию $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условии, что x, y и z подчинены ограничениям $F_1 = x + 2y + 3z - 10 = 0$ и $F_2 = x - y + 2z - 1 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (x + 2y + 3z - 10) + \lambda_2 (x - y + 2z - 1)$$

определим ее стационарные точки из системы

$$L'_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$
$$L'_y = 2y + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0;$$
$$L'_z = 2z + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0;$$
$$L'_{\lambda_1} = x + 2y + 3z - 10 = 0;$$
$$L'_{\lambda_2} = x - y + 2z - 1 = 0.$$

Решив эту систему, найдем, что $x_0 = \frac{19}{59}$; $y_0 = \frac{146}{59}$; $z_0 = \frac{93}{59}$; $\lambda_1^0 = -\frac{110}{59}$; $\lambda_2^0 = \frac{72}{59}$.

Убедимся в том, что точка $(x_0, y_0, z_0,) = \left(\frac{19}{59}, \frac{146}{59}, \frac{93}{59}\right) = M_0$, расположенная на линии пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 10 = 0$; $x - y + 2z - 1 = 0$ наименее удалена от начала координат. Для этого проверим выполнение достаточных условий условного экстремума. Вычислим якобианы

$$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix}(F_1)'_y & (F_1)'_z \\ (F_2)'_y & (F_2)'_z\end{matrix}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix}2 & 3 \\ -1 & 2\end{matrix}\right| = 7;$$

$$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix}(F_1)'_x & (F_1)'_z \\ (F_2)'_x & (F_2)'_z\end{matrix}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix}1 & 3 \\ 1 & 2\end{matrix}\right| = -1;$$

$$\left|\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix}(F_1)'_x & (F_1)'_y \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y\end{matrix}\right|_{M_0} = \left|\begin{matrix}1 & 2 \\ 1 & -1\end{matrix}\right| = -3$$

и матрицу

$$\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Составим соотношение (6.151). Получим

$$Q = (7, -1, -3)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= (7, -1, -3)\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} = 127 > 0.$$

Таким образом, действительно, точка $M_0 = \left(\frac{19}{59}, \frac{146}{59}, \frac{93}{59}\right)$ ближе других точек искомой прямой расположена к началу координат. ■

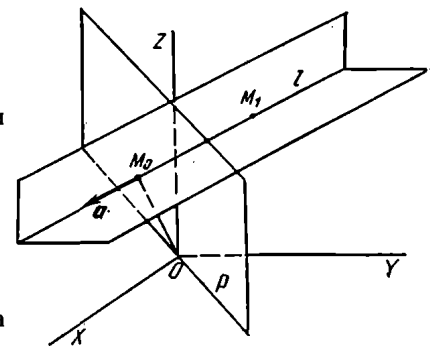


Рис. 6.21

Решим эту задачу методами аналитической геометрии. Единственность решения ее очевидна (рис. 6.21).

Параметрические уравнения прямой l имеют вид $x = 7t + 4$; $y = t + 3$; $z = -3t$, где $M_1 = (4, 3, 0)$ — точка, лежащая на прямой; $\mathbf{a} = (7, 1, -3)$ — направляющий вектор этой прямой. Тогда $7x + y - 3z = 0$ — уравнение плоскости P, проходящей через начало координат перпендикулярно к прямой l. Отсюда получаем, что точка $M_0 = \left(\frac{19}{59}, \frac{146}{59}, \frac{93}{59}\right)$ является искомой.

Пример 3. Найти прямоугольный параллелепипед максимального объема, который можно поместить в эллипсоид.

□ Если $2x$, $2y$ и $2z$ — измерения искомого параллелепипеда, то по условию задачи требуется максимизировать функцию $f(x, y, z) = 8xyz$ при условии $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Составим функцию Лагранжа $L(x, y, z; \lambda) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$.

Из системы

$$L'_x = 8yz + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0;$$
$$L'_y = 8xz + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0;$$
$$L'_z = 8xy + 2\lambda\frac{z}{c^2} = 0;$$
$$L'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

находим, что стационарными для функции L являются точки

$$(a/\sqrt{3},\ b/\sqrt{3},\ c/\sqrt{3},\ -4abc/\sqrt{3}) \text{ и } (-a/\sqrt{3},\ -b/\sqrt{3},\ -c/\sqrt{3},\ -4abc/\sqrt{3}).$$

Убедимся, что объем параллелепипеда со сторонами $2a/\sqrt{3}$, $2b/\sqrt{3}$, $2c/\sqrt{3}$ максимален. Находим:

$$F'_x\Big|_{x=a/\sqrt{3}} = \frac{2}{a\sqrt{3}};\ F'_y\Big|_{y=b/\sqrt{3}} = \frac{2}{b\sqrt{3}};\ F'_z\Big|_{z=c/\sqrt{3}} = \frac{2}{c\sqrt{3}};$$

$$\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda/a^2 & 8z & 8y \\ 8z & 2\lambda/b^2 & 8x \\ 8y & 8x & 2\lambda/c^2 \end{bmatrix}_{\substack{x=a/\sqrt{3};\ y=b\sqrt{3}; \\ z=c/\sqrt{3};\ \lambda=-4abc/\sqrt{3}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8bc/a\sqrt{3} & 8c/\sqrt{3} & 8b/\sqrt{3} \\ 8c/\sqrt{3} & -8ac/b\sqrt{3} & 8a/\sqrt{3} \\ 8b/\sqrt{3} & 8a/\sqrt{3} & -8ab/c\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Составим выражение (6.150). Получим

$$Q = \begin{bmatrix} -2/c\sqrt{3} & 0 & 2/a\sqrt{3} \\ 0 & -2/c\sqrt{3} & 2/b\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8bc/a\sqrt{3} & 8c/\sqrt{3} & 8b/\sqrt{3} \\ 8c/\sqrt{3} & -8ac/b\sqrt{3} & 8a/\sqrt{3} \\ 8b/\sqrt{3} & 8a/\sqrt{3} & -8ab/c\sqrt{3} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -2/c\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2/c\sqrt{3} \\ 2/a\sqrt{3} & 2/b\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/c\sqrt{3} & 0 & 2/a\sqrt{3} \\ 0 & -2/c\sqrt{3} & 2/b\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32b/3a & 0 \\ 0 & 32a/3b \\ -32b/3c & -32a/3c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -128b/3\sqrt{3}ac & -64/3\sqrt{3}c \\ -64/3\sqrt{3}c & -128a/3\sqrt{3}bc \end{bmatrix}.$$

Так как $-128b/3\sqrt{3}ac < 0$; $|Q| = 192/3\sqrt{3} > 0$, то объем $V = 8abc/3\sqrt{3}$ параллелепипеда со сторонами $2a/\sqrt{3}$, $2c/\sqrt{3}$, $2c\sqrt{3}$, вписанного в эллипсоид, действительно является максимальным. ■

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D с границей Γ и дифференцируема во всех ее внутренних точках. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса существуют точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, в которых функция f принимает наибольшее и наименьшее значения (глобальный экстремум), т. е.

$$f(\mathbf{x}') = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}); \; f(\mathbf{x}'') = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}).$$

Точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ следует искать среди стационарных точек функции f внутри области D или среди точек, принадлежащих границе Γ. Сравнив наибольшее и наименьшее значения функции f в стационарных точках с наибольшим и наименьшим значением функции f на границе Γ, найдем искомый максимум и минимум функции f в области D.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y\,(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$ (рис. 6.22).

□ Найдем стационарные точки, лежащие внутри треугольника ($x > 0$; $y > 0$):

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy\,(4 - 3x - 2y) = 0; \\ z'_y &= 2x^2 - x^3 - 2xy^2 = x^2\,(2 - x - 2y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0; \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную стационарную точку $P_0 = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, лежащую внутри треугольника. Вычислим значение функции z в этой точке: $z(P_0) = 1/4$. На сторонах треугольника $x = 0$ и $y = 0$ значения функции z тоже равны нулю. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции z на стороне $x + y = 6$. На ней $y = 6 - x$; $x \in [0, 6]$; $z = z(x) = x^2(6 - x) \times (2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$. Имеем $z(0) = z(6) = 0$. Далее, решая уравнение $z'(x) = -48x + 12x^2 = 0$, находим стационарную точку $x_0 = 4 \in (0, 6)$ ($x_1 = 0$ — граничная точка отрезка $[0, 6]$). В точке $x_0 = 4$ значение $z(x_0) = z(4) = -128$.

Таким образом, глобальный экстремум функции z в данной области надо искать среди следующих ее значений:

$z = 1/4$ — внутри треугольника в точке $P_0 = (1, 1/2)$;

$z = 0$ — на сторонах $x = 0$; $y = 0$;

$z = -128$ — на стороне $x + y = 6$ в точке $(4, 2)$.

Отсюда видно, что $\max z = 1/4$; $\min z = -128$. ■

Пример 5. Найти глобальный экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

□ Из системы $u'_x = 2x = 0$; $u'_y = 2y = 0$; $u'_z = 2z = 0$ находим единственную стационарную точку $(0, 0, 0)$, лежащую внутри шара. В ней значение функции $u(0, 0, 0) = 0$. Во всех точках границы шара (на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$) значение функции u постоянно и равно $u = R^2$. Отсюда видно, что глобальный минимум функции $u = 0$, а глобальный максимум, равный R^2, достигается в любой точке сферы. ■

Заметим, что исследование функции двух переменных на глобальный экстремум в замкнутой области иногда удается провести геометрически. Поясним суть сказанного на примере.

Пример 6. Найти глобальный экстремум функции $z = x^2 + 3y$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

□ Рассмотрим линии уровня целевой функции $z = x^2 + 3y$. Этими линия-

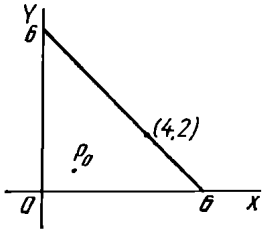


Рис. 6.22

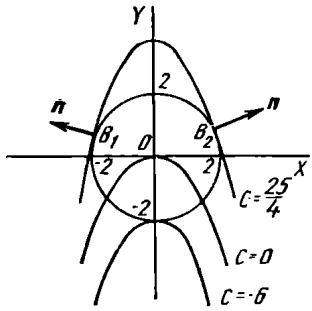


Рис. 6.23

ми являются параболы $x^2 + 3y = c$ (рис. 6.23), где C—значение целевой функции в точке (x, y). Ясно, что большему значению C отвечает и большее значение целевой функции. Следовательно, парабола с максимальным (минимальным) значением C, при котором она имеет с данным кругом общие точки, и будет определять глобальный максимум (минимум) искомой целевой функции в данном круге. Очевидно, что при $C = -6$ парабола $x^2 + 3y = -6$ касается круга в точке $A = (0, -2)$, т. е. $\min z = -6$ достигается целевой функцией в точке A. При возрастании C соответствующие параболы будут располагаться все выше и выше, при этом найдется такая парабола, которая касается круга в точках B_1 и B_2. В этих точках, согласно вышеизложенному, и будет достигаться глобальный максимум целевой функции.

Найдем координаты точек B_1 и B_2. Обозначим $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Тогда в точках B_1 и B_2 градиенты функций $z = x^2 + 3y$ и $F(x, y)$ параллельны (они направлены по нормали n к линии уровня), т. е. $\operatorname{grad} z \parallel \operatorname{grad} F$. Но $\operatorname{grad} z = 2x\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\operatorname{grad} F = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. Поэтому $(\operatorname{grad} z \parallel \operatorname{grad} F) \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{2x} = \frac{3}{2y}\right)$. Отсюда $y = \frac{3}{2}$; $x = \pm\sqrt{4 - y^2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Таким образом, глобальный максимум целевой функции z достигается в точках $A_1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и $A_2 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, причем $\max z = \frac{\sqrt{7}}{2}\Big) + 3\frac{3}{2} = \frac{25}{4}$. ■

Задачи и упражнения

1. Найти экстремум функции $z = e^{xy}$ при условии, что $x + y = 1$.

2. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

3. Даны три точки $A = (4, 0, 4)$, $B = (4, 4, 4)$ и $C = (4, 4, 0)$. Найти на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ такую точку S, чтобы объем пирамиды $SABC$ был: а) наибольшим; б) наименьшим.

4. Найти глобальный экстремум функции $z = (x - y)^2\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в области $y^2 \leqslant x \leqslant 2$.

7. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

7.1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Понятие интеграла, зависящего от параметра, и его непрерывность. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ двух переменных x и y, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Если функция f непрерывна в прямоугольнике $D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ (рис. 7.1), то при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ существует интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$, являющийся, очевидно, функцией переменного y, т. е.

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx,\ y \in [c, d]. \tag{7.1}$$

Интеграл (7.1) называется *собственным интегралом, зависящим от параметра* y.

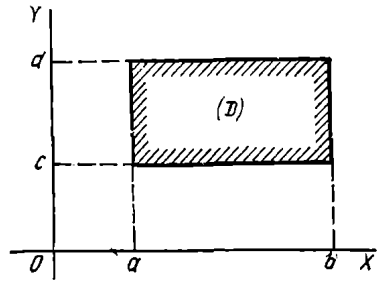


Рис. 7.1

Установим, в каком случае интеграл (7.1) является непрерывной функцией.

Теорема 7.1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D, то интеграл (7.1) является непрерывной функцией переменного y на отрезке $[c, d]$.

□ Придадим точке $y \in [c, d]$ приращение Δy, такое, чтобы $y + \Delta y \in [c, d]$. Тогда

$$|F(y + \Delta y) - F(y)| = \left|\int_a^b f(x, y + \Delta y)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|\,dx. \tag{7.2}$$

В силу условий теоремы функция f равномерно непрерывна в D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon/(b - a)$ при $|\Delta y| < \delta$.

Отсюда и из оценки (7.2) получаем неравенство

$$|F(y + \Delta y) - F(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon,\ \forall\, |\Delta y| < \delta,$$

что и доказывает непрерывность функции $F(y)$, $\forall y \in [c, d]$. ■

Доказанная теорема оправдывает законность следующей формулы:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)\,dx=\int_a^b f(x,\ y_0)\,dx, \tag{7.3}$$

если $f(x,\ y)$ непрерывна в области D, $y_0\in[c,\ d]$.

Пример 1. Вычислить предел $I=\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^2 x^3\cos xy dx$.

□ В силу непрерывности подынтегральной функции по формуле (7.3) имеем

$$I=\int_0^2\lim_{y\to 0}(x^3\cos xy)\,dx=\int_0^2 x^3dx=4.\ \blacksquare$$

Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра. Рассмотрим вопрос о дифференцируемости и интегрируемости по параметру собственного интеграла (7.1).

Теорема 7.2. Если функция $f(x,\ y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ в прямоугольнике D, то справедлива *формула Лейбница* дифференцирования под знаком интеграла

$$F'(y)=\int_a^b\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx. \tag{7.4}$$

□ Составим разностное отношение ($y+\Delta y\in[c,\ d]$):

$$\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\int_a^b[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}\,dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta y\to 0$ и используя непрерывность производной f'_y с учетом формулы (7.3), получаем

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\int_a^b f(x,\ y+\Delta y)\,dx-\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right]=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_a^b[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]\,dx=$$

$$=\int_a^b\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}\right]dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx,$$

что и доказывает формулу (7.4). ■

Рассмотрим теперь случай, когда пределы интегрирования a и b в интеграле (7.1) тоже зависят от параметра, т. е.

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,\ y)\,dx. \tag{7.5}$$

Следствие. Если в условиях теоремы 7.2 функции $a=a(y)$ и $b=b(y)$ являются непрерывно дифференцируемыми, то интеграл (7.5) является дифференцируемой функцией, и производная ее вычисляется по формуле

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx+f(b(y),\ y)\,b'(y)-f(a(y),\ y)\,a'(y). \tag{7.6}$$

□ Интеграл (7.5) является функцией переменных y, $a(y)$, $b(y)$, т. е. $F(y)=F(y,\ a(y),\ b(y))=F(y,\ a,\ b)$. Вычисляя ее полную производную, получим

$$F'(y)=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial a}\cdot\frac{da}{dy}+\frac{\partial F}{\partial b}\cdot\frac{db}{dy}. \tag{7.7}$$

Вычислим участвующие в этом равенстве производные. Согласно теореме 7.2, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_a^b \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx=\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx.$$

Далее, согласно формуле дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу (5.48), получаем равенства:

$$\frac{\partial F}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=f(b,\ y)=f(b(y),\ y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=-f(a,\ y)=-f(a(y),\ y).$$

Подставив найденные значения производных в равенство (7.7), мы и получим формулу (7.6). ■

Пример 2. Вычислить производную функцию $F(y)=\int_y^{\sin y}\ln(x+y)\,dx$.

□ По формуле (7.6) имеем

$$F'(y)=\int_y^{\sin y}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y)\,dx+\ln(y+\sin y)\cos y-\ln 2y=\int_y^{\sin y}\frac{dx}{x+y}+$$

$$+\cos y\ln(y+\sin y)-\ln 2y=\ln(x+y)\Big|_{x=y}^{x=\sin y}+\cos y\ln(y+\sin y)-\ln 2y=$$

$$=(1+\cos y)\ln(x+\sin y)-2\ln 2y.\ \blacksquare$$

Перейдем к вопросу об интегрировании интеграла (7.1) по параметру. Имеет место

Теорема 7.3. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D, то справедливо равенство

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{7.8}$$

□ Двойные интегралы в формуле (7.8) имеют следующий смысл. Например, интеграл $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$ надо понимать так: сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$, при этом получим некоторую функцию $\varphi(x)$, которую затем интегрируем в пределах от a до b.

Рассмотрим функции $(c \leqslant s \leqslant d)$:

$$\Phi_1(s) = \int_c^s \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy; \quad \Phi_2(s) = \int_a^b \left(\int_c^s f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Поскольку интеграл (7.1) в условиях теоремы является непрерывной функцией $F(y)$, то функция $\Phi_1(s) = \int_c^s F(y)dy$ непрерывно дифференцируема по s как интеграл с переменным верхним пределом. Аналогично непрерывным является интеграл $\int_c^s f(x, y)\,dy$, $\forall s \in [c, d]$. Тогда функция $\Phi_2(s)$ тоже является непрерывно дифференцируемой по s в силу теоремы 7.2. Дифференцируя функции $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$, получаем

$$\Phi_1'(s) = \Phi_2'(s) = \int_a^b f(x, s)\,dx, \quad s \in [c, d].$$

Отсюда следует, что $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$ являются первообразными для $F(s) = \int_a^b f(x, s)\,dx$. Но в точке $s = c$ выполнено равенство $\Phi_1(c) = \Phi_2(c) = 0$. Поэтому по известному свойству первообразных заключаем, что $\Phi_1(s) \equiv \Phi_2(s)$, $s \in [c, d]$. Отсюда при $s = d$ получаем формулу (7.8). ■

Пример 3. Проинтегрировать по параметру y интеграл $F(y) = \int_a^b y^x dx$, $a > 0$, $b > 0$ в пределах от 0 до 1.

□ $I = \int_0^1 F(y)\,dy = \int_0^1 dy \int_a^b y^x dx = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y}\,dy.$

Интеграл I нельзя вычислить по формуле Ньютона — Лейбница, так как неопределенный интеграл $\int \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy$ не выражается в элементарных функциях. Однако, воспользовавшись формулой (7.8), получим

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 y^x dx = \int_a^b dx \int_0^1 y^x dy = \int_a^b \frac{y^{x+1}}{x+1}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}. \quad ■$$

Дифференцирование и интегрирование по параметру в собственных интегралах позволяет вычислить некоторые интегралы. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 4. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интегралы:

$$1)\ I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx;$$

$$2)\ I(a,\ b)=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx.$$

□ 1) Дифференцируя по параметру a, имеем $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}$. Нетрудно получить, что

$$\int\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1-a^2}[x-|a|\operatorname{arctg}(|a|\operatorname{tg}x)].$$

Поэтому

$$I'(a)=\frac{1}{1-a^2}[x-|a|\operatorname{arctg}(|a|\operatorname{tg}x)]\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-|a|}{1-a^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+|a|}.$$

Отсюда

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{1+|a|}+C=\begin{cases}C+\dfrac{\pi}{2}\ln(1+a),\ a>0;\\ C-\dfrac{\pi}{2}\ln(1-a),\ a<0,\end{cases}=C+\frac{\pi}{2}\ln(1+|a|)\operatorname{sign}a,$$

где $\operatorname{sign}a=\begin{cases}1,\ a>0;\\ 0,\ a=0;\\ -1,\ a<0.\end{cases}$

Так как $I(0)=0$, то из равенства (7.9) получаем, что $C=0$. Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+|a|)\operatorname{sign}a.\ \blacksquare$$

□ 2) Продифференцировав данный интеграл, к примеру по параметру b, получим

$$I'_b(a,\ b)=\int_0^{\pi/2}\frac{2b\cos^2x\,dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=2b\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2x}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int\frac{dx}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{b^2-a^2}\left[x-\left|\frac{a}{b}\right|\operatorname{arctg}\left(\left|\frac{a}{b}\right|\operatorname{tg}x\right)\right].$$

Поэтому

$$I'_b(a,\ b)=\frac{2b}{b^2-a^2}\left[x-\left|\frac{a}{b}\right|\operatorname{arctg}\left(\left|\frac{a}{b}\right|\operatorname{tg}x\right)\right]\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2b}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2}-\left|\frac{a}{b}\right|\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$= \frac{\pi}{b\left(1-\left|\frac{a}{b}\right|^2\right)}\left(1-\left|\frac{a}{b}\right|\right) = \frac{|b|}{b}\cdot\frac{\pi}{|a|+|b|} = \frac{\pi \operatorname{sign} b}{|a|+|b|}.$$

В таком случае

$$I(a, b) = \pi \operatorname{sign} b \int \frac{db}{|a|+|b|} + C(a), \tag{7.10}$$

где $C(a)$ — постоянная интегрирования, зависящая от a, так как интегрирование в равенстве (7.10) ведется по переменной b. Вычисляя интеграл в этом равенстве, получаем

$$I(a, b) = \pi \operatorname{sign} b \begin{cases} \ln(|a|+b), & b>0; \\ -\ln(|a|-b), & b<0 \end{cases} + C(a) = \pi \operatorname{sign} b \ln(|a|+|b|) \operatorname{sign} b + C(a) = \pi \ln(|a|+|b|) + C(a). \tag{7.11}$$

Так как $I(1, 1) = 0$, то из равенства (7.11) получаем

$$0 = \pi \ln 2 + C(a) \Rightarrow C(a) = -\pi \ln 2.$$

В итоге из формулы (7.11) выводим, что

$$I(a, b) = \pi \ln(|a|+|b|) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}.$$

Рекомендуем читателю проверить, что аналогичный результат получается, если интеграл $I(a, b)$ продифференцировать по параметру a. ■

Пример 5. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x^2-1)\,dx = -\int_0^1 \sin\ln x \frac{x^3-x}{\ln x}\,dx.$$

□ Заметим, что $\frac{x^3-x}{\ln x} = \int_1^3 x^y dy$. Тогда в соответствии с формулой (7.8) искомый интеграл I принимает вид

$$I = -\int_0^1 \sin\ln x\left(\int_1^3 x^y dy\right)dx = -\int_1^3 dy \int_0^1 x^y \sin\ln x\,dx. \tag{7.12}$$

Вычислим внутренний несобственный интеграл второго рода в формуле (7.12) по частям. Имеем

$$I_1 = \int_0^1 x^y \sin\ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \sin\ln x; & du = \dfrac{\cos\ln x}{x} \\ dv = x^y dx; & v = \dfrac{x^{y+1}}{y+1} \end{array}\right| = \frac{x^{y+1}}{y+1}\sin\ln x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y \cos\ln x\,dx = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1}\sin\ln\varepsilon - \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\ln x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\ln x\,dx, \tag{7.13}$$

ибо внеинтегральный член равен нулю как предел произведения бесконечно малой при $\varepsilon\to+0$ величины ε^{y+1} на ограниченную величину $\sin\ln\varepsilon$. Снова интегрируя по частям, из равенства (7.13) получаем

$$I_1 = -\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y \cos \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos \ln x; & du = -\dfrac{\sin \ln x}{x} \\ dv = x^y; & v = \dfrac{x^{y+1}}{y+1} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{y+1}\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\cos \ln x\Big|_0^1 + \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y \sin \ln x\,dx\right] = -\frac{1}{y+1}\left(\frac{1}{y+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{y+1} I_1\right) = -\frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{(y+1)^2} I_1.$$

Из этого уравнения (относительно интеграла I_1) находим, что

$$I_1 = \int_0^1 x^y \sin \ln x\,dx = -\frac{1}{y^2+2y+2} = -\frac{1}{1+(y+1)^2}.$$

Подставив теперь I_1 в интеграл (7.12), окончательно получим

$$I = \int_1^3 \frac{dy}{1+(y+1)^2} = \operatorname{arctg}(y+1)\Big|_1^3 = \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{9}. \blacksquare$$

Задачи и упражнения

1. Вычислить предел $\lim\limits_{y\to 0}\int_3^1 \sqrt[3]{x^4+y^2}\,dx$.

2. Найти $F'(y)$ для функций:

а) $F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\sin xy}{x}dx$; б) $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2}dx$.

3. Найти F''_{xy}, если

$$F(x, y) = \int_{x/y}^{xy} (x - yt) f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — дифференцируемая функция.

4. Исходя из равенства $\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, вычислить интеграл $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интегралы:

а) $\int_0^\pi \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

6. Интегрированием под знаком интеграла вычислить

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\ (a>0,\ b>0).$$

Функциональная последовательность, ее поточечная сходимость. Рассмотрим последовательность функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots, \tag{7.14}$$

определенных на отрезке $[a,\ b]$, которую кратко будем обозначать в виде $\{u_n(x)\}$. При любом фиксированном $x_0 \in [a,\ b]$ последовательность (7.14) превращается в числовую последовательность

$$\{u_n(x_0)\} = u_1(x_0),\ u_2(x_0),\ \ldots,\ u_n(x_0),\ \ldots\ . \tag{7.15}$$

Функциональная последовательность (7.14) называется *сходящейся (расходящейся) в точке* x_0, если сходится (расходится) числовая последовательность (7.15). В этом случае точка x_0 называется точкой сходимости (расходимости) последовательности $\{u_n(x)\}$. Если последовательность сходится в каждой точке $x \in [a,\ b]$, то она называется *сходящейся на отрезке* $[a,\ b]$. При этом предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$, зависящий от точки x, является некоторой функцией от x. Этот факт будем обозначать следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x),\ x \in [a,\ b], \tag{7.16}$$

причем $u(x)$ называется *предельной функцией.*

Например, последовательность $\{\sin nx\}$ в точке $x_0 = 0$ сходится, очевидно, к нулю. В точке же $x = \pi/2$ эта последовательность имеет вид $\left\{\sin n\frac{\pi}{2}\right\}$ и является расходящейся.

По определению, функция $u(x)$ является пределом последовательности $\{u_n(x)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon,\ x)$, зависящий от ε и от выбранной точки $x \in [a,\ b]$, такой, что

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon,\ x). \tag{7.17}$$

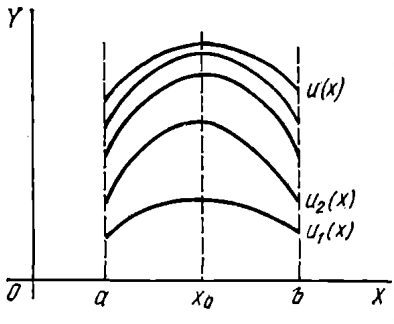


Рис. 7.2

Сходимость последовательности (7.14) к предельной функции $u(x)$ в точке x_0 означает, что графики функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... в точке с абсциссой x_0 «прижимаются» к графику функции $u(x)$ при $x = x_0$ (рис. 7.2).

Пример 1. Рассмотрим последовательность функций $u_n(x) = x^n$, $x \in [0,\ 1]$. Для нее

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases} \tag{7.18}$$

Заметим, что в этом примере предельная функция оказалась разрывной в точке $x = 1$, хотя каждая из функций $u_n(x) = x^n$ последовательности является непрерывной для всех $x \in [0,\ 1]$ (рис. 7.3). Это

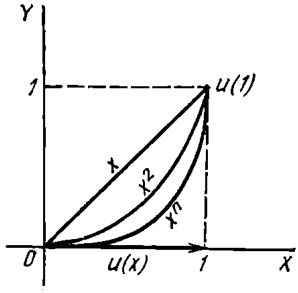


Рис. 7.3

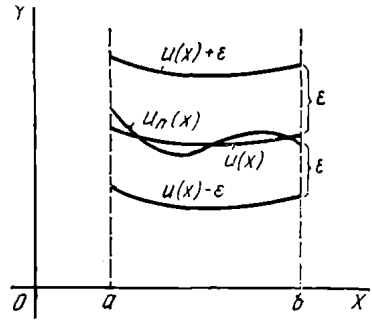


Рис. 7.4

означает, что предельная функция в общем случае не наследует всех свойств функций $u_n(x)$ последовательности (7.14).

Равномерная сходимость функциональных последовательностей. Функциональная последовательность $\{u_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от x, такой, что

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \forall x \in [a, b[. \tag{7.19}$$

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $u_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$, $x \in R$.

□ Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin nx = 0$, так как $|\sin nx| \leqslant 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Для произвольного положительного ε решим неравенство (7.19):

$$\left(\left|\frac{1}{n}\sin nx\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon\right) \Rightarrow \left(n > \frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \left(N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right), \ \forall x \in R. \ \blacksquare$$

Геометрически равномерная сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к функции $u(x)$ на отрезке $[a, b]$ означает следующее: если заключить график функции $y = u(x)$ в ε-полосу, определяемую неравенствами $u(x) - \varepsilon < u_n(x) < u(x) + \varepsilon$, $x \in [a, b]$, то графики всех функций $u_n(x)$, $n \geqslant N(\varepsilon)$, будут целиком лежать в этой полосе (рис. 7.4).

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности обладают рядом весьма важных свойств, которые мы сформулируем и докажем в виде теорем.

Теорема 7.4 (непрерывность предела). Если последовательность непрерывных функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $u(x)$, то $u(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

□ Пусть x и $x + \Delta x$ — точки отрезка $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что выполнены неравенства

$$|u_N(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |u_N(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.20}$$

В силу непрерывности функции $u_N(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при всех $|\Delta x| < \delta$ выполнено неравенство

$$|u_N(x+\Delta x) - u_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.21}$$

Тогда

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| = |u(x+\Delta x) - u_N(x+\Delta x) + u_N(x+\Delta x) - u_N(x) + u_N(x) - u(x)| \leqslant |u(x+\Delta x) - u_N(x+\Delta x)| + |u_N(x) - u(x)| + |u_N(x+\Delta x) - u_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

в силу неравенств (7.20) и (7.21). Последнее и доказывает непрерывность предельной функции $u(x)$ в точке $x \in [a, b]$. ■

Для последовательности непрерывных на $[0, 1]$ функций $u_n(x) = x^n$ предельная функция оказалась разрывной в точке $x = 1$ (см. пример 1). Значит, эта последовательность не является равномерно сходящейся на $[0, 1]$.

Теорема 7.5 (предельный переход под знаком интеграла). Если последовательность непрерывных функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции $u(x)$, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} u_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt, \tag{7.22}$$

где $a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b$.

□ В силу равномерной сходимости последовательности $\{u_n(x)\}$ предельная функция $u(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и, значит, существует интеграл $\int_{x_0}^{x} u(t)\,dt$, $\forall x \in [a, b]$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$|u(t) - u_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall t \in [a, b].$$

В таком случае

$$\left|\int_{x_0}^{x} u(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} [u(t) - u_n(t)]\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |u(t) - u_n(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0| < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant N,$$

так как $|x - x_0| \leqslant |b - a|$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер N, такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

а это и означает справедливость равенства (7.22). ■

Теорема 7.6 (переход к пределу под знаком производной). Если

последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{u_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$ к функции $u(x)$, а последовательность производных функций $\{u_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $v(x)$, то $u'(x) = v(x)$.

□ На основании теоремы 7.5 последовательность производных функций можно интегрировать почленно, причем, согласно формуле (7.22), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} v(t)\,dt. \tag{7.23}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (u_n(x) - u_n(x_0)) = u(x) - u(x_0),$$

так что равенство (7.23) принимает вид

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} v(t)\,dt.$$

Дифференцируя это равенство, получаем $u'(x) = v(x)$. ■

Заметим, что требование равномерной сходимости последовательности производных функций $\{u_n'(x)\}$ является существенным. Так, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin nx\right\}$, как установлено в примере 2, сходится, более того, равномерно сходится к функции $u(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Однако последовательность производных $\left\{\frac{1}{n}\sin nx\right\}' = \{\cos nx\}$ не стремится к $u'(x) \equiv 0$ при $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е. равенство $u'(x) = v(x)$ в этом случае не имеет места.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что последовательность функций $u_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $|x| < \infty$, сходится к функции $u(x) = \operatorname{sign} x$ неравномерно.

2. Показать, что последовательность $\{\sqrt[n]{\sin x}\}$ сходится на отрезке $[0, \pi]$, но не равномерно. Найти ее предел $u(x)$.

3. Показать, что последовательность $\{e^{-(x-n)^2}\}$ сходится равномерно к функции $u(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

7.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Понятие несобственного интеграла, зависящего от параметра, его сходимость. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в области $D_\infty = \{(x, y) \mid a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ (рис. 7.5) и пусть

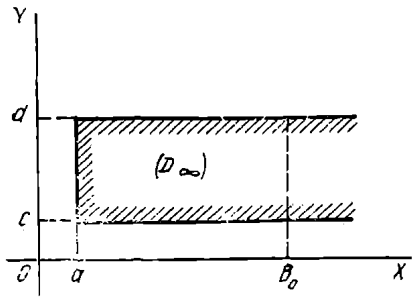


Рис. 7.5

при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ существует несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)\,dx$, являющийся функцией от y, т. е.

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx, \quad y \in [c, d]. \qquad (7.24)$$

Интеграл (7.24) называется *несобственным интегралом, зависящим от параметра y*. Наша задача заключается в выяснении условий существования интеграла (7.24) и изучении его свойств.

Интеграл (7.24) называется *сходящимся в точке* $y \in [c, d]$, если существует конечный предел

$$\lim_{B \to \infty} \int_a^B f(x, y)\,dx = F(y),$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует число B_0, такое, что для всех $B \geqslant B_0$ выполнено неравенство

$$\left| F(y) - \int_a^B f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Если несобственный интеграл (7.24) сходится в каждой точке отрезка $[c, d]$, то он называется *сходящимся на этом отрезке*. Заметим, что промежуток $[c, d]$ может быть и бесконечным. Интеграл (7.24) называется абсолютно сходящимся на $[c, d]$, если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x, y)|\,dx$.

Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признак Вейерштрасса. Фигурирующее в определении сходимости несобственного интеграла число B_0 зависит в общем случае как от ε, так и от выбранной точки y, т. е. $B_0 = B_0(\varepsilon, y)$. Если же число B_0 зависит только от ε и не зависит от выбора точки $y \in [c, d]$, то сходимость несобственного интеграла (7.24) называется равномерной. Другими словами, несобственный интеграл (7.24) называется *равномерно сходящимся* по параметру y на отрезке $[c, d]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B_0 = B_0(\varepsilon)$, такое, что для всех $B \geqslant B_0$ выполнено неравенство

$$\left| F(y) - \int_a^B f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d]. \qquad (7.25)$$

Представляя интеграл (7.24) в виде

$$F(y) = \int_a^B f(x, y)\,dx + \int_B^\infty f(x, y)\,dx, \qquad (7.26)$$

с учетом неравенства (7.25) получаем, что интеграл (7.24) сходится

равномерно на $[c, d]$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $B_0 = B_0(\varepsilon)$, такое, что для всех $B \geqslant B_0$ интеграл $\int\limits_B^\infty f(x, y)\,dx$, называемый *остатком* интеграла (7.24), удовлетворяет неравенству

$$\left|\int\limits_B^\infty f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon, \quad \forall y \in [c, d]. \tag{7.27}$$

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$I(y) = \int\limits_1^\infty \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\,dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

□ Отметим вначале, что

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и оценим остаток интеграла $I(y)$:

$$\left|\int\limits_B^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \int\limits_B^R \frac{(y^2 - x^2)\,dx}{(x^2 + y^2)^2}\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \frac{x}{(x^2 + y^2)}\Bigg|_{x=B}^{x=R}\right| =$$

$$= \left|\lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2 + y^2} - \frac{B}{B^2 + y^2}\right| = \frac{B}{B^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{B} < \varepsilon.$$

Отсюда видно, что в качестве B_0 можно взять число $B_0 = 1/\varepsilon$. Тогда при $B \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ неравенство (7.27) будет выполнено, что и доказывает, согласно определению, равномерную сходимость интеграла $I(y)$ для всех $y \in \mathbf{R}$. ■

На практике удобным для исследования несобственных интегралов на равномерную сходимость является *признак Вейерштрасса.*

Теорема 7.7 (признак Вейерштрасса). Если на промежутке $[a, +\infty)$ существует неотрицательная функция $g(x)$, такая, что

$$|f(x, y)| \leqslant g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty], \quad \forall y \in [c, d], \tag{7.28}$$

и несобственный интеграл

$$I = \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \tag{7.29}$$

сходится, то несобственный интеграл (7.24) сходится равномерно (и абсолютно) на $[c, d]$.

□ В силу неравенства (7.28) имеем

$$\left|\int\limits_B^\infty f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_B^\infty |f(x, y)|\,dx \leqslant \int\limits_B^\infty g(x)\,dx. \tag{7.30}$$

Отсюда в силу сходимости интеграла (7.29) заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B_0 = B_0(\varepsilon)$, такое, что остаток $\int\limits_B^\infty g(x)\,dx < \varepsilon$. Учитывая это, из неравенств (7.30) и (7.27) получаем,

что интеграл (7.24) сходится равномерно (и абсолютно) по y на отрезке $[c, d]$. ■

Функция $g(x)$, удовлетворяющая условию (7.28), называется *мажорантой или мажорантной функцией для* $f(x, y)$.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx.$$

□ Так как $\left|\frac{\cos ax}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} = g(x)$, $\forall a \in \mathbf{R}$, и интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ (сходящийся), то по признаку Вейерштрасса заключаем, что интеграл $I(a)$ сходится равномерно для всех $a \in \mathbf{R}$. ■

Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра. Доказательства свойств равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра, наиболее просто получаются, если свести эти интегралы к функциональным последовательностям и воспользоваться соответствующими теоремами о последовательностях. Для этого заметим, что если несобственный интеграл (7.24) сходится равномерно, то в силу неравенства (7.25) для любой последовательности $\{B_n\}$, стремящейся к бесконечности, функциональная последовательность

$$\int_a^{B_n} f(x, y)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.31}$$

сходится равномерно на $[c, d]$ и выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{B_n} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = F(y). \tag{7.32}$$

Докажем теперь следующие теоремы.

Теорема 7.8 (непрерывность несобственного интеграла по параметру). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D_∞ и интеграл $F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно по y на отрезке $[c, d]$, то функция $F(y)$ непрерывна на $[c, d]$.

□ Так как функция $f(x, y)$ непрерывна, то в силу теоремы 7.1 будут непрерывны по y и функции последовательности (7.31). Тогда из соотношения (7.32) и теоремы 7.4 следует непрерывность $F(y)$ на $[c, d]$. ■

Теорема 7.9 (интегрируемость несобственного интеграла по параметру). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D_∞ и интеграл $F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$, то

$$\int_c^d F(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{7.33}$$

□ Несобственный интеграл $F(y)$ сходится равномерно по y, если равномерно по y сходится последовательность (7.31). Но равномерно сходящуюся последовательность можно интегрировать в силу теоремы 7.5. Тогда

$$\int_c^d F(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_c^d dy \int_a^{B_n} f(x,\ y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{B_n} dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy =$$
$$= \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x,\ y)\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy,$$

причем знаки интегрирования в первом и во втором интегралах в правой части этого равенства переставлены на основании теоремы 7.3. ■

Теорема 7.10 (дифференцируемость несобственного интеграла по параметру). Пусть функция $f(x,\ y)$ имеет непрерывную по y частную производную $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$, интеграл $\int_a^{\infty} f(x,\ y)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx$ сходится равномерно по y. Тогда

$$F'(y) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx. \tag{7.34}$$

□ Если последовательность (7.31) сходится, а последовательность ее производных

$$\frac{d}{dy}\int_a^{B_n} f(x,\ y)\,dx = \int_a^{B_n} \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx,\ n \in \mathbf{N}, \tag{7.35}$$

сходится равномерно, то на основании теоремы 7.6 последовательность (7.31) можно дифференцировать почленно. В таком случае, перейдя к пределу в равенстве (7.35), получим равенство (7.34). ■

Примеры вычисления несобственных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру. Рассмотрим некоторые примеры вычисления несобственных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования их по параметру.

Пример 3. Вычислить несобственный интеграл

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx. \tag{7.36}$$

□ Данный интеграл сходится в соответствии с признаком Абеля — Дирихле, но непосредственно его нельзя дифференцировать по параметру a, так как это приводит к расходящемуся интегралу $\int_0^{\infty} \cos ax\,dx$.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I(k,\ a) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\,dx,$$

отличающийся от данного «множителем сходимости» e^{-kx}, $k>0$. Покажем, что $I(k, a)$ является непрерывной функцией от k (при фиксированном $a \neq 0$) не только при $k>0$, но и при $k=0$. Для этого убедимся, что интеграл $I(k, a)$ сходится равномерно относительно k. Действительно, интегрируя по частям в остатке $\int\limits_B^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx$ (положив $u=1/x$, $dv=e^{-kx}\sin axdx$), получаем

$$\int\limits_B^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx=-\frac{e^{-kx}\sin(ax+\varphi)}{x\sqrt{k^2+a^2}}\Big|_{x=B}^{\infty}-\int\limits_B^\infty\frac{e^{-kx}\sin(ax+\varphi)}{x^2\sqrt{k^2+a^2}}dx,$$

где φ — вспомогательный угол, определяемый соотношениями

$$\cos\varphi=\frac{k}{\sqrt{k^2+a^2}};\ \sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{k^2+a^2}}\left(v=\int e^{-kx}\sin axdx=\right.$$

$$=-\frac{e^{-kx}(k\sin ax+a\cos ax)}{k^2+a^2}=-\frac{e^{-kx}\sqrt{k^2+a^2}\sin(ax+\varphi)}{k^2+a^2}=$$

$$\left.=-e^{-kx}\frac{\sin(ax+\varphi)}{\sqrt{k^2+a^2}}\right).$$

Так как $\left|\frac{e^{-kx}\sin(ax+\varphi)}{\sqrt{k^2+a^2}}\right|\leqslant\frac{1}{|a|}$ при $a\neq 0$ и $x\geqslant 0$, то

$$\left|\int\limits_B^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx\right|\leqslant\frac{1}{B|a|}+\frac{1}{|a|}\int\limits_B^\infty\frac{dx}{x^2}=\frac{2}{B|a|}<\varepsilon$$

при $B>\frac{2}{|a|\varepsilon}=B_0$ сразу для всех $k\geqslant 0$, что и означает равномерную сходимость интеграла $I(k, a)$. Тем самым доказано, что

$$F(a)=\lim_{k\to+0}I(k, a). \tag{7.37}$$

Продифференцируем теперь интеграл $I(k, a)$ по параметру a, получим

$$I_a'(k, a)=\int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos axdx. \tag{7.38}$$

Дифференцирование по a здесь возможно, так как функции $f(x, a)=e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}$ и $f_a'=e^{-kx}\cos ax$ непрерывны при $x\geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\sin axdx$ сходится равномерно по a, поскольку $|e^{-kx}\cos ax|\leqslant e^{-kx}$, а $\int\limits_0^\infty e^{-kx}dx$ — сходящийся интеграл при $k>0$.

Дважды интегрируя по частям интеграл (7.38), получаем

$$I_a'(k, a)=\frac{k}{k^2+a^2}.$$

Из этого равенства интегрированием по a находим

$$I(k, a)=\operatorname{arctg}\frac{a}{k}+C, \tag{7.39}$$

где C — произвольная постоянная. Так как $I(k, 0) = 0$, то из равенства (7.39) при $a = 0$ получаем $(0 = \operatorname{arctg} 0 + C) \Rightarrow (C = 0)$. Тем самым окончательно имеем

$$I(k, a) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{a}{k}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to +0$, согласно соотношению (7.36), получаем

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg} \frac{a}{k} = \begin{cases} \pi/2, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -\pi/2, & a < 0, \end{cases}$$

т. е

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a. \blacksquare \tag{7.40}$$

Пример 4. Исходя из равенства (7.40), найти величину интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx.$$

□ Имеем

$$\int_a^b \frac{\sin yx}{x}\, dy = -\frac{\cos yx}{x^2}\Big|_{y=a}^{y=b} = \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}.$$

Поэтому искомый интеграл I можно представить в виде

$$I = \int_0^\infty dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x}\, dy = \int_a^b dy \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y \int_a^b dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} (b - a) \operatorname{sign} y = \frac{\pi}{2} (b - a),$$

если $b > a > 0$. В последнем равенстве перестановка порядка интегрирования законна, так как интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx$ сходится равномерно относительно $y > 0$. В этом можно убедиться, представив интеграл в виде

$$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin yx}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx$$

и применив его к интегралу $\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx$ формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx = -\frac{\cos yx}{xy}\Big|_{x=1}^\infty + \frac{1}{y} \int_1^\infty \frac{\cos yx}{x^2}\, dx = \frac{\cos y}{y} + \frac{1}{y} \int_1^\infty \frac{\cos yx}{x^2}\, dx.$$

Интеграл же $\int\limits_1^\infty \frac{\cos yx}{x^2}\,dx$ сходится равномерно, так как он мажорируется сходящимся несобственным интегралом $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. ■

Пример 5. Вычислить *интеграл Эйлера — Пуассона* $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

□ Данный интеграл сходится в силу признака сравнения, поскольку при $x > 1$ имеем $e^{-x^2} < e^{-x}$, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$ сходится. Положим $x = yt$, где $y > 0$. Тогда $dx = ydt$, $0 \leqslant t < +\infty$, и, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = y\int\limits_0^\infty e^{-y^2t^2}dt.$$

Умножим обе части этого равенства на $e^{-y^2}dy$ и, используя формулу (7.33), проинтегрируем по y от 0 до ∞. В результате будем иметь

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}ydy \int\limits_0^\infty e^{-y^2t^2}dt =$$

$$= -\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty e^{-(1+t^2)y^2}ydy = \int\limits_0^\infty \left[-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)y^2}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=\infty} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\right). \blacksquare \qquad (7.41)$$

Несобственные интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра. *Несобственным интегралом от неограниченной функции, зависящим от параметра* y, называется интеграл вида

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx, \qquad (7.42)$$

где $\lim\limits_{x\to\xi} f(x,\ y) = \pm\infty$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, причем не исключено, что промежуток $[a,\ b]$ бесконечен.

Пусть, например, $a < \xi < b$. Тогда, по определению, несобственный интеграл (7.42) равен

$$\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx = \lim_{\lambda'\to+0}\int\limits_a^{\xi-\lambda'} f(x,\ y)\,dx + \lim_{\lambda''\to+0}\int\limits_{\xi+\lambda''}^b f(x,\ y)\,dx. \qquad (7.43)$$

Интеграл $F(y)$ называется сходящимся при фиксированном $y \in [c,\ d]$, если предел (7.43) существует, при этом интеграл называет -

ся сходящимся на отрезке $[c, d]$, если он сходится в каждой точке этого отрезка. Наконец, интеграл (7.42) называется равномерно сходящимся по параметру y на отрезке $[c, d]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство

$$\left| F(y) - \left[\int_a^{\xi-\lambda'} f(x, y)\,dx + \int_{\xi+\lambda''}^{b} f(x, y)\,dx \right] \right| = \left| \int_{\xi-\lambda'}^{\xi+\lambda''} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$$

будет выполняться при всех λ', λ'', удовлетворяющих неравенствам $0 < \lambda' < \delta$; $0 < \lambda'' < \delta$ сразу для всех $y \in [c, d]$.

Теория несобственных интегралов от неограниченных функций аналогична теории несобственных интегралов с параметром с бесконечными пределами интегрирования, поэтому на ней мы не будем останавливаться.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что если несобственный интеграл (7.24) сходится абсолютно, то он сходится.

2. Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках интегралы:

а) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x\,dx$ $(0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty)$;

б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

3. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\,dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ m \neq 0)$;

б) $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x}\,dx$ $(\alpha > -1)$.

4. Интегрируя равенство $\int_0^{\infty} e^{-xy}dx = \frac{1}{y}$ по y, $y > 0$, найти интеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-bx}}{x}\,dx$, $0 < a < b$.

7.4. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

Гамма-функция и ее свойства. *Гамма-функцией* называется интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt, \tag{7.44}$$

являющийся функцией параметра x. Найдем ее область определения.

Для этого представим $\Gamma(x)$ в виде

$$\Gamma(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{7.45}$$

Рассмотрим первый интеграл из этого равенства. Имеем

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt. \tag{7.46}$$

Интеграл (7.46) является несобственным интегралом второго рода. Из оценки $|t^{x-1}e^{-t}|\leqslant t^{x-1}$ при $t>0$ и того факта, что интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ сходится при $1-x<1$, т. е. при $x>0$, вытекает сходимость интеграла (7.46) (по признаку сравнения) при $x>0$. Если же $x\leqslant 0$, то интеграл (7.46) расходится (согласно примеру 13, § 5.10).

Рассмотрим теперь второй интеграл в равенстве (7.45), являющийся несобственным интегралом первого рода. Так как показательная функция e^{-t} убывает при $t\to\infty$ быстрее, чем функция t^{-2}, то

$$\lim_{t\to\infty} t^{-2}t^{x-1}e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{t^{3-x}}=0$$

при любом x. Отсюда следует, что существует константа $C>0$, такая, что $t^{x-1}e^{-t}\leqslant C/t^2$ при $t\to\infty$. Поскольку несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{Cdt}{t^2}$ сходится, то отсюда получаем, что интеграл $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, согласно признаку сравнения, сходится при любом $x>0$.

Покажем теперь, что интеграл, определяющий гамма-функцию, сходится равномерно на всяком отрезке $[c, d]$, где $0<c<d<+\infty$. В самом деле, пусть $c\leqslant x\leqslant d$. Тогда если $0\leqslant t\leqslant 1$, то $t^{x-1}e^{-t}<t^{c-1}e^{-t}$, а если $t\geqslant 1$, то $t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{d-1}e^{-t}$. Так как интегралы $\int_0^1 t^{c-1}e^{-t}dt$ и $\int_1^\infty t^{d-1}e^{-t}dt$ сходятся, то из формулы (7.45) в силу признака Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость интеграла $\Gamma(x)$ на отрезке $[c, d]$. Отсюда в силу теоремы 7.8 следует непрерывность $\Gamma(x)$ при $x>0$.

Пример 1. Вычислить $\Gamma(1)$ и $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

□ Имеем $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt=\left|t=z^2\right.$,

$dt = 2zdz \mid = 2\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz = 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$ согласно формуле (7.41). ■

Установим некоторые свойства гамма-функции. Прежде всего заметим, что $\Gamma(x) > 0$ при $x > 0$, в частности, гамма-функция не имеет нулей.

1°. Интегрируя по частям, из формулы (7.44) получаем

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

Итак, при любом $x > 0$ справедлива *формула приведения* для гамма-функции

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{7.47}$$

2°. Так как $\Gamma(1) = 1$, то при целом $x = n$ имеем $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)$, т. е.

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{7.48}$$

При $n = 0$ формула (7.48) дает $0! = \Gamma(1) = 1$.

Аналогично, применяя повторно формулу (7.47) при $x > 0$, получаем

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x). \tag{7.49}$$

3°. Выше доказано, что областью определения $\Gamma(x)$ является полупрямая $0 < x < +\infty$, на которой гамма-функция непрерывна и дифференцируема любое число раз. В частности,

$$\Gamma''(x) = \int\limits_0^1 t^{x-1}\ln^2 te^{-t}dt > 0,$$

поэтому производная $\Gamma'(x)$ может иметь только один нуль. А так как, согласно равенству (7.48), $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля этот нуль x_0 производной $\Gamma'(x)$ существует и лежит в интервале (1, 2). Поскольку $\Gamma''(x) > 0$, то в точке x_0 функция $\Gamma(x)$ имеет минимум.

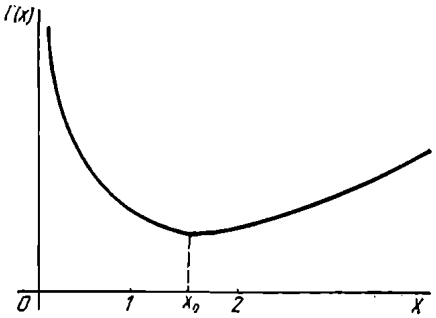


Рис. 7.6

4°. Из формулы (7.47) следует, что $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \to \infty$ при $x \to +0$, так как $\Gamma(x+1) \to \Gamma(1)$ при $x \to +0$ в силу непрерывности $\Gamma(x)$. График функции $\Gamma(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 7.6.

Бета-функция и ее свойства. *Бета-функцией* называется интеграл

$$B(x,\ y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \tag{7.50}$$

зависящий от параметров x и y. Подынтегральная функция в нем имеет две особые точки $t=0$ и $t=1$.

Для отыскания области определения $B(x,\ y)$ представим интеграл (7.50) в виде

$$B(x,\ y)=\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt+\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{7.51}$$

Тогда каждый из интегралов в формуле (7.51) имеет по единственной особой точке. Интеграл

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^{1/2}\frac{(1-t)^{y-1}}{t^{1-x}}dt,$$

на основании примера 13, § 5.10, сходится при $1-x<1$, т. е. при $x>0$.

Аналогично интеграл

$$\int_1^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_1^{1/2}\frac{t^{x-1}dt}{(1-t)^{1-y}},$$

согласно тому же примеру, сходится при $1-y<1$, т. е. при $y>0$.

Таким образом, бета-функция определена для всех положительных значений x и y.

Можно доказать, что интеграл (7.51) равномерно сходится в каждой области $x\geqslant a>0$, $y\geqslant c>0$, а, значит, бета-функция непрерывна при $x>0$, $y>0$.

Установим некоторые свойства бета-функции.

1°. В интеграле (7.50) сделаем замену $x=\dfrac{z}{1+z}$ и сведем бета-функцию к интегралу

$$B(x,\ y)=\int_0^\infty\frac{z^{x-1}dz}{(1+z)^{x+y}}. \tag{7.52}$$

2°. Докажем, что при $x>0$ и $y>0$ справедлива формула

$$B(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{7.53}$$

Для этого в формуле (7.44) введем замену $t=sz$, где $s>0$. Тогда

$$\Gamma(x)=s^x\int_0^\infty z^{x-1}e^{-sz}dz.$$

Заменяя здесь x на $x+y$ и s на $1+s$, получаем

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+s)^{x+y}} = \int_0^\infty z^{x+y-1}e^{-(1+s)z}dz.$$

Умножая это равенство на s^{x-1} и интегрируя результат по s от 0 до ∞, имеем

$$\Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{s^{x-1}ds}{(1+s)^{x+y}} = \int_0^\infty s^{x-1}ds \int_0^\infty z^{x+y-1}e^{-(1+s)z}dz.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части полученного равенства и учитывая формулу (7.52), находим

$$\Gamma(x+y)B(x, y) = \int_0^\infty z^{y-1}e^{-z}dz \int_0^\infty (sz)^{x-1}e^{-(sz)}d(sz) =$$

$$= \int_0^\infty z^{y-1}e^{-z}dz \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma(y)\Gamma(x).$$

Формула (7.53) доказана.

3°. Бета-функция является симметричной относительно x и y, т. е.

$$B(x, y) = B(y, x),$$

что следует из формулы (7.53).

4°. Осуществим в интеграле (7.52) замену $z = \operatorname{tg}^2\varphi$, получим

$$B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2y-1}\varphi\cos^{2x-1}\varphi d\varphi. \quad (7.54)$$

С помощью формулы (7.54) можно получить *формулу дополнения* для гамма-функции

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \quad 0 < x < 1, \quad (7.55)$$

часто используемую в приложениях.

Бета- и гамма-функции называются *интегралами Эйлера* 1-го и 2-го рода соответственно.

Применение интегралов Эйлера к вычислению определенных интегралов. Эйлеровы интегралы являются хорошо изученными неэлементарными функциями. Для них составлены подробные таблицы.

Многие интегралы вычисляются сведением их к интегралам Эйлера. Приведем некоторые примеры.

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x dx$.

□ Согласно равенствам (7.54) и (7.53), имеем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)-1} x\cos^{2\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-1} x dx =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}. \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \ln^p (1/x)\, dx$.

□Введем замену $1/x = e^y$. Тогда

$$\int_0^1 \ln^p (1/x)\, dx = \int_0^\infty y^p e^{-y} dy = \Gamma(p+1). \blacksquare$$

Пример 4. Вычислить $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}\, dx}{(1+x)^2}$.

$$\square \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}\, dx}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}} dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

согласно формулам (7.52), (7.53), (7.47) и (7.55). $\blacksquare$

Пример 5. Вычислить $\int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx$.

□ Подынтегральная функция является четной относительно x, поэтому

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = 2\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx.$$

Введем замену $tx^2 = u$, тогда

$$2\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \int_0^\infty e^{-u} t^{-n-\frac{1}{2}} u^{n-\frac{1}{2}} du =$$

$$= t^{-n-\frac{1}{2}} \int_0^\infty u^{\left(n+\frac{1}{2}\right)-1} e^{-u} du = t^{-n-1/2}\Gamma(n+1/2). \blacksquare$$

Задачи и упражнения

1. Доказать равенство

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

2. Доказать, что $\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, где $n \in N$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$.

3. Доказать, что $\Gamma(1/2+x)\,\Gamma(1/2-x)=\dfrac{\pi}{\cos \pi x}$.

4. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\,dx$; в) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{a-1}-x^{b-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$.

7.5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Асимптотика одного интеграла. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I(k)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin kx}{1+x}\,dx, \tag{7.56}$$

зависящий от параметра k. Этот интеграл сходится в силу признака Абеля — Дирихле, но не вычисляется в элементарных функциях.

В силу сходимости интеграла (7.56) его остаток

$$\int\limits_B^\infty \frac{\sin kx}{1+x}\,dx \to 0 \text{ при } B\to\infty,$$

поэтому при больших B имеет место приближенное равенство

$$I(k)\approx\int\limits_0^B \frac{\sin kx}{1+x}\,dx. \tag{7.57}$$

Попытка вычислить интеграл (7.57) по формуле

$$\int\limits_0^B \frac{\sin kx}{1+x}\,dx\approx\sum_{i=1}^N \frac{\sin k\xi_i}{1+\xi_i}\,\Delta x_i \tag{7.58}$$

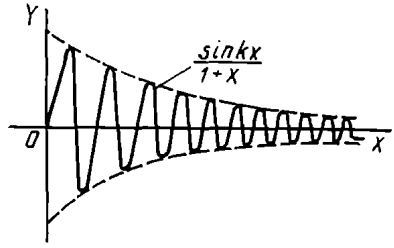


Рис. 7.7

приводит к противоречивым результатам в зависимости от N и k. Это объясняется тем, что функция $\sin kx$ при больших k является *быстроосциллирующей*, т. е. является функцией с большим числом колебаний на отрезке конечной длины. Примерный график подынтегральной функции $\dfrac{\sin kx}{1+x}$ приведен на рис. 7.7.

Поставим теперь перед собой следующую задачу: получить для интеграла $I(k)$ *асимптотическую формулу*, т. е. формулу, позволяющую оценивать этот интеграл при достаточно больших k ($k\to\infty$).

Интегрируя по частям выражение под знаком интеграла (7.56), имеем

$$I(k)=\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x}\,d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=-\frac{\cos kx}{k(1+x)}\Big|_0^\infty-$$

$$-\frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{\cos kx}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{k}F_1(k), \tag{7.59}$$

где

$$F_1(k) = \int_0^\infty \frac{\cos kx}{(1+x)^2}\,dx. \tag{7.60}$$

Вычисляя интеграл (7.60) методом интегрирования по частям, получаем

$$F_1(k) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \frac{\sin kx}{k(1+x)^2}\Big|_0^\infty + \frac{2}{k}F_2(k), \tag{7.61}$$

где

$$F_2(k) = \int_0^\infty \frac{\sin kx}{(1+x)^3}\,dx, \tag{7.62}$$

причем для любого k справедлива оценка

$$|F_2(k)| \leqslant \int_0^\infty \frac{|\sin kx|}{(1+x)^3}\,dx \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}. \tag{7.63}$$

Из формул (7.59)—(7.63) вытекает равенство

$$I(k) = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2}F_2(k) = \frac{1}{k} + R(k), \tag{7.64}$$

в котором остаточный член

$$R(k) = -\frac{2}{k^2}F_2(k) \tag{7.65}$$

удовлетворяет, согласно неравенству (7.63), оценке

$$|R(k)| \leqslant \frac{1}{k^2}. \tag{7.66}$$

Итак, получена приближенная (или асимптотическая) формула

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{\sin kx}{1+x}\,dx = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \to \infty. \tag{7.67}$$

Напомним, что равенство $R(k) = O(1/k^2)$ при $k \to \infty$ означает существование такого числа $C > 0$, для которого справедливо неравенство $|R(k)| \leqslant C\frac{1}{k^2}$, $k \to \infty$. В нашем случае, согласно неравенству (7.66), имеем $C = 1$.

Абсолютная погрешность приближенного равенства $I(k) \approx 1/k$ стремится к нулю при $k \to \infty$, причем скорость убывания этой по-

грешности характеризуется неравенством (7.66). Например, при $k = 1000$ погрешность равенства $I(1000) \approx 10^{-3}$ не превосходит 10^{-6}.

Далее, дважды интегрируя по частям, из равенств (7.65), (7.62) и (7.59) получаем

$$I(k) = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3} + \frac{6}{k^3}\int_0^\infty \frac{\cos kx}{(1+x)^4}\,dx = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3} +$$

$$+ \frac{24}{k^4}\int_0^\infty \frac{\sin kx}{(1+x)^5}\,dx = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3} + \frac{24}{k^4}F_3(k), \tag{7.68}$$

где $F_3(k) = \int_0^\infty \frac{\sin kx}{(1+x)^5}\,dx$,

причем

$$|F_3(k)| = \left|\int_0^\infty \frac{\sin kx}{(1+x)^5}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{4}. \tag{7.69}$$

Таким образом, формула (7.68) принимает вид

$$I(k) = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3} + R_1(k), \tag{7.70}$$

где $R_1(k) = \frac{24}{k^4}F_3(k)$, причем в силу неравенства (7.69) $|R_1(k)| \leqslant$ $\leqslant \frac{24}{k^4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{k^4}$, т. е. $R_1(k) = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$. С учетом этого асимптотическую формулу (7.70) можно записать в виде

$$I(k) = \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right),\ k \to \infty, \tag{7.71}$$

уточняющем формулу (7.67). При этом абсолютная погрешность приближенного равенства $I(k) \approx \frac{1}{k} - \frac{2}{k^3}$ характеризуется слагаемым $O(1/k^4)$, $k \to \infty$.

На примере интеграла $I(k)$ мы убедились в важности метода интегрирования по частям при выводе формулы асимптотического интегрирования.

Вычисление интегралов вида

$$I(k) = \int_a^b f(x)\,e^{ikx}dx. \tag{7.72}$$

В интеграле (7.72) предполагается, что k — параметр, $k > 0$, $k \to +\infty$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, а $f(x)$ — комплекснозначная функция действительного переменного x, непрерывно дифференцируемая необходимое число раз. При $a = -\infty$ или $b = +\infty$ предполагается,

что все встречающиеся в дальнейшем несобственные интегралы сходящиеся.

Применив формулу интегрирования по частям, получаем

$$I(k)=\int_a^b f(x)\,d\left(\frac{e^{ikx}}{ik}\right)=\frac{e^{ikx}}{ik}f(x)\Big|_a^b-\frac{1}{ik}\int_a^b e^{ikx}f'(x)\,dx=$$

$$=[f(b)\,e^{ikb}-f(a)\,e^{ika}]\,\frac{1}{ik}-\frac{1}{ik}I_1(k), \tag{7.73}$$

где

$$I_1(k)=\int_a^b f'(x)\,e^{ikx}dx. \tag{7.74}$$

Оценивая интеграл $I_1(k)$ с учетом того, что $|e^{ikx}|=1$, имеем

$$|I_1(k)|\leqslant\int_a^b|f'(x)|\,dx. \tag{7.75}$$

Еще раз интегрируя по частям в интеграле (7.74), получаем

$$I_1(k)=\int_a^b f'(x)\,d\left(\frac{e^{ikx}}{ik}\right)=\frac{e^{ikx}}{ik}f'(x)\Big|_a^b-\frac{1}{ik}\int_a^b f''(x)\,e^{ikx}dx=$$

$$=\frac{1}{ik}[f'(b)\,e^{ikb}-f'(a)\,e^{ika}]-\frac{1}{ik}I_2(k),$$

где $I_2(k)=\int_a^b f''(x)\,e^{ikx}dx$.

С учетом этого формула (7.73) приобретает вид

$$I(k)=\frac{f(b)\,e^{ikb}-f(a)\,e^{ika}}{ik}+\frac{f'(b)\,e^{ikb}-f'(a)\,e^{ika}}{k^2}-\frac{1}{k^2}I_2(k). \tag{7.76}$$

Так как

$$\frac{|f'(b)\,e^{ikb}-f'(a)\,e^{ika}|}{k^2}\leqslant\frac{|f'(b)|+|f'(a)|}{k^2}\quad\text{и}\quad\frac{|I_2(k)|}{k^2}\leqslant\frac{1}{k^2}\int_a^b|f''(x)|\,dx,$$

то, очевидно, существует такая постоянная C, что

$$\left|\frac{f'(b)\,e^{ikb}-f'(a)\,e^{ika}}{k^2}-\frac{1}{k^2}I_2(k)\right|\leqslant C\,\frac{1}{k^2}.$$

Отсюда и из формулы (7.76) получаем асимптотическую формулу

$$I(k)=\frac{f(x)\,e^{ikx}}{ix}\Big|_a^b+O\left(\frac{1}{k^2}\right),\quad k\to\infty. \tag{7.77}$$

Вычисление интегралов вида

$$I(k)=\int_a^b f(x)\,e^{ik\Phi(x)}dx. \tag{7.78}$$

При $\varphi(x) = x$ интеграл (7.78) превращается в интеграл (7.72). Все предположения, относящиеся к интегралу (7.72), сохраняются. Функция $\varphi(x)$, называемая *фазовой функцией* или просто *фазой* — действительнозначная функция переменного x, непрерывно дифференцируемая достаточное число раз, причем $\varphi'(x) \neq 0$ на $[a, b]$.

В этом случае также применим метод интегрирования по частям. Имеем

$$I(k) = \int_a^b \frac{f(x)}{ik\varphi'(x)}\, d\left(e^{ik\varphi(x)}\right) = \frac{f(x)\, e^{ik\varphi(x)}}{ik\varphi'(x)}\Bigg|_a^b - \frac{1}{ik} I_1(k),$$

где

$$I_1(k) = \int_a^b \left(\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right)' e^{ik\varphi(x)} dx. \tag{7.79}$$

Заметим, что функция $f_1(x) = \left(\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right)'$ по условию непрерывна на $[a, b]$. Так как $\varphi(x)$ — действительнозначная функция, то $|e^{ik\varphi(x)}| = 1$ и

$$|I_1(k)| \leqslant \int_a^b \left|\left(\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right)'\right| dx = \int_a^b |f_1(x)|\, dx.$$

Интегрируя по частям в интеграле (7.79), как и в предыдущем пункте, придем к следующей асимптотической формуле:

$$I(k) = \int_a^b f(x)\, e^{ik\varphi(x)} dx = \frac{f(x)\, e^{ik\varphi(x)}}{ik\varphi'(x)}\Bigg|_a^b + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \to \infty. \tag{7.80}$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл Френеля

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{it^2} dt, \tag{7.81}$$

играющий большую роль в задачах, описывающих распространение волн, и вычислим его для любого x.

□ При $x = +\infty$ точное значение интеграла (7.81) известно:

$$\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{it^2} dt = e^{i\pi/4}.$$

Тогда

$$\Phi(x) = e^{i\pi/4} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \psi(x), \tag{7.82}$$

где

$$\psi(x) = \int_x^\infty e^{it^2} dt. \tag{7.83}$$

Введя замену $t = xy$, где $x > 0$ — фиксированное число, интеграл (7.83) сведем к интегралу

$$\psi(x) = x\int_{\Gamma}^{\infty} e^{ix^2y^2}dy, \tag{7.84}$$

имеющему вид интеграла (7.78) при $f(y) = 1$, $\varphi(y) = y^2$, а $k = x^2$ — большой параметр. Применяя к интегралу (7.84) формулу (7.80), получаем

$$\psi(x) = x\frac{e^{ix^2y^2}}{ix^2 2y}\Big|_{y=1}^{\infty} + xO\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty, \tag{7.85}$$

так как $\left|\frac{e^{ix^2y^2}}{ix^2 2y}\right|_{y=\infty} = \frac{1}{2|xy|}\Big|_{y=\infty} = 0$ и $xO\left(\frac{1}{x^4}\right) = O\left(\frac{x}{x^4}\right) = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Из формул (7.82) и (7.85) получаем асимптотическую формулу для интеграла Френеля (7.81) в виде

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{it^2}dt = e^{i\pi/4} - \frac{ie^{ix^2}}{\sqrt{\pi}\,x} + O(1/x^3), \quad x \to +\infty.$$

Выделяя в этой формуле действительную и мнимую части, получаем равенство

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (\cos t^2 + i\sin t^2)\,dt = \cos\pi/4 + i\sin\pi/4 - \frac{i}{x\sqrt{\pi}}(\cos x^2 + i\sin x^2) + O(1/x^3).$$

Отсюда

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \cos t^2 dt = \cos\pi/4 + \frac{\sin x^2}{x\sqrt{\pi}} + O(1/x^3), \quad x \to +\infty,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sin t^2 dt = \sin\pi/4 - \frac{\cos x^2}{x\sqrt{\pi}} + O(1/x^3), \quad x \to +\infty. \blacksquare$$

Вычисление интегралов вида

$$I(k) = \int_a^b f(x)\,e^{ks(x)}dx. \tag{7.86}$$

Получим асимптотическую формулу для интеграла (7.86) при $k \to +\infty$, в котором $f(x)$ — комплекснозначная функция; $s(x)$ — действительнозначная функция переменного x, причем функции $f(x)$ и $s(x)$ непрерывно дифференцируемы достаточное число раз. Предполагается, кроме того, что функция $s(x)$ достигает максимума в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда $s'(x_0) = 0$. Предположим дополнительно, что $s''(x_0) < 0$, $f(x_0) \neq 0$.

Представим интеграл (7.86) в виде

$$I(k) = e^{ks(x_0)}\int_a^b f(x)\,e^{k[s(x)-s(x_0)]}dx. \tag{7.87}$$

Функция $e^{k[s(x)-s(x_0)]}$ в точке x_0 тоже будет иметь максимум, причем

он будет тем острее, чем больше k (на рис. 7.8 изображены графики этой функции при $k_3 > k_2 > k_1$) Поэтому при больших k основной вклад в интеграл (7.86) будет вносить малая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0. В связи с этим можно записать приближенное равенство

$$I(k) \approx e^{ks(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\, e^{k[s(x)-s(x_0)]}dx \tag{7.88}$$

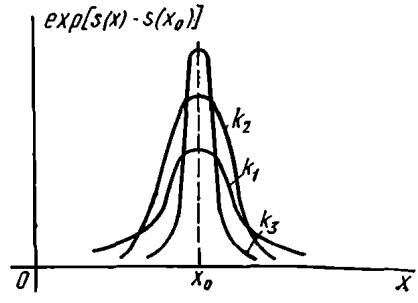


Рис. 7.8

В окрестности $U_\delta(x_0)$ функцию $f(x)$ можно приближенно заменить значением $f(x_0)$ (при больших k), а функцию $s(x) - s(x_0)$ разложить по формуле Тейлора

$$s(x) - s(x_0) \approx \frac{s''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \tag{7.89}$$

так как $s'(x_0) = 0$ по условию. Тогда из равенств (7.88) и (7.89) имеем приближенно

$$I(k)e^{-ks(x_0)} \approx \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x_0)\, e^{\frac{k}{2}s''(x_0)(x-x_0)^2}dx = I_1(k). \tag{7.90}$$

Заменой $y = (x - x_0)\sqrt{\frac{-ks''(x_0)}{2}}$, $s''(x_0) < 0$, интеграл (7.90) приведем к виду

$$I_1(k) = \sqrt{\frac{-2}{ks''(x_0)}}\, f(x_0) \int_{-\sqrt{-ks''(x_0)/2}}^{\sqrt{-ks''(x_0)/2}} e^{-y^2}dy.$$

Отсюда видно, что при $k \to +\infty$

$$I_1(k) = \sqrt{\frac{-2}{ks''(x_0)}}\, f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{-\frac{2\pi}{ks''(x_0)}}\, f(x_0) \tag{7.91}$$

согласно интегралу Эйлера — Пуассона (7.41).

Таким образом, окончательно из формул (7.90) и (7.91) получаем *асимптотическую формулу Лапласа*

$$\int_a^b f(x)\, e^{ks(x)}dx \approx e^{ks(x_0)} f(x_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{ks''(x_0)}},\quad k \to +\infty, \qquad (7.92)$$

условия применимости которой изложены выше. Заметим, что эта формула получена с помощью нестрогих рассуждений.

Если внутри (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ имеется N точек x_{0k}, $k = 1, 2, \ldots, N$, для которых выполняются условия, изложенные выше, то промежуток интегрирования разбиваем на N участков так, чтобы на каждом из них содержалась только одна точка x_{0k}. Применяя к каждому такому участку формулу (7.92), получаем

$$\int_a^b f(x)\, e^{ks(x)}dx = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\frac{-2\pi}{ks''(x_{0k})}}\, f(x_{0k})\, e^{ks(x_{0k})},\quad k \to +\infty. \qquad (7.93)$$

Для интегралов вида

$$\int_a^b f(x)\, e^{-ks(x)}dx, \qquad (7.94)$$

в котором $k \to +\infty$, а функция $s(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет минимум, причем $s'(x_0) = 0$; $s''(x_0) > 0$, формула Лапласа (7.92) записывается как

$$\int_a^b f(x)\, e^{-ks(x)}dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{ks''(x_0)}}\, f(x_0)\, e^{-ks(x_0)}. \qquad (7.95)$$

Формула Стирлинга. В качестве примера применения асимптотической формулы Лапласа выведем *формулу Стирлинга*, определяющую приближенно величину факториалов больших чисел. Согласно формуле (7.48), имеем

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t+n\ln t}dt.$$

Введем замену $t = xn$, тогда

$$n! = n^{n+1} \int_0^\infty e^{-n(x-\ln x)}dx. \qquad (7.96)$$

Замечаем, что при больших n интеграл (7.96) имеет форму (7.94), причем $f(x) = 1$, $s(x) = x - \ln x$, $k = n$; $a = 0$; $b = \infty$. Функция $s(x)$

имеет одну точку x_0 минимума, определяемую уравнением $s'(x_0) = 1 - \frac{1}{x_0} = 0$, откуда $x_0 = 1$. В этой точке $s''(x_0) = \frac{1}{x_0^2} = 1 > 0$, $s(x_0) = 1$. Поэтому по формуле (7.95) получаем

$$n! \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\, n^{n+1} e^{-n}$$

или

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{7.97}$$

Это и есть формула Стирлинга.

Вычисление интегралов вида

$$I(k) = \int_a^b f(x)\, e^{ks(x)} dx. \tag{7.98}$$

В этом интеграле $k \to +\infty$; $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$; $f(x)$ — комплекснозначная функция; $s(x)$ — действительнозначная функция, причем эти функции достаточное число раз непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Кроме того, $s'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, функция $s(x)$ монотонно убывает на $[a, b]$ $(s'(x) < 0)$, принимая наибольшее значение в точке $x = a$. Аналогично ведет себя функция $e^{ks(x)}$, $k > 0$.

Введем вспомогательную функцию

$$\bar{s}(x) = s(x) - s(a)$$

и представим интеграл (7.98) в виде

$$I(k) = e^{ks(a)} \int_a^b f(x)\, e^{k\bar{s}(x)} dx. \tag{7.99}$$

К интегралу (7.99) применим формулу интегрирования по частям, получим

$$I(k) = e^{ks(a)} \int_a^b \frac{f(x)}{ks'(x)}\, d\left(e^{k\bar{s}(x)}\right) = e^{ks(a)} \left[\frac{f(x)\, e^{k\bar{s}(x)}}{ks'(x)}\Bigg|_a^b - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k} \int_a^b \left(\frac{f(x)}{s'(x)}\right)' e^{k\bar{s}(x)} dx\right] = \frac{e^{ks(a)}}{k} F(k), \tag{7.100}$$

где

$$F(k)=\int_a^b f_1(x)\,e^{k\bar{s}(x)}dx,\quad f_1(x)=\left(\frac{f(x)}{s'(x)}\right)',$$

причем функция $f_1(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Так как $\bar{s}(x)<0$ при $a<x\leqslant b$ и $k>0$, то

$$|F(k)|\leqslant\int_a^b|f_1(x)|e^{k\bar{s}(x)}dx\leqslant\int_a^b|f_1'(x)|\,dx. \tag{7.101}$$

Нетрудно заметить, что интегралы $I(k)$ и $F(k)$ имеют одинаковую структуру. Применяя к интегралу $F(k)$ формулу интегрирования по частям из равенства (7.100) с учетом оценки (7.101), получаем асимптотическую формулу

$$I(k)=e^{ks(a)}\left[-\frac{1}{k}\cdot\frac{f(a)}{s'(a)}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\quad k\to+\infty. \tag{7.102}$$

Здесь учтено, что результат подстановки верхнего предела $x=b$ содержит множитель $e^{k\bar{s}(b)}$, $\bar{s}(b)<0$, убывающий при $k\to+\infty$ быстрее любой степени k, и поэтому этот член можно отбросить (включить в остаток).

Задачи и упражнения

1. Для интеграла вероятностей

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt,$$

применяя равенство (7.102), получить асимптотическую формулу

$$\Phi(x)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left\{\frac{1}{|x|}+O(1/|x|^3)\right\},\quad x\to\infty.$$

Указание. Зная, что

$$\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt=\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},$$

представить $\Phi(x)$ в виде $\Phi(x)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\psi(x)$, где $\psi(x)=\int_{x^2}^\infty\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$, и ввести замену $t=x^2y$.

2. С помощью интегрирования по частям показать, что для интеграла

$$\Phi(x) = \int_x^\infty e^{it^2} dt$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(x) = e^{ix^2}\left(\frac{i}{2x} + \frac{1}{4x^3}\right) + O\left(\frac{1}{x^5}\right), \quad x \to +\infty.$$

ОТВЕТЫ

4.1

1. а) $x+y=1$; в) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

2. а) $-\mathbf{i}+\mathbf{k}$; б) $e\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$; $x+2y+3z-6=0$.

4.2

1. в) $2\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.

5.1

1. а) $\dfrac{1}{3}\arcsin^3 x+\arcsin x+C$; б) $-\dfrac{1}{2(2\sin x-3\cos x)^2}+C$; в) $\dfrac{x^2}{2}-2\ln(x^2+4)+C$; г) $-\cos\ln x+C$; д) $e^{\sqrt{x^2-1}}+C$; е) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$; ж) $\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$; з) $-\dfrac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$; и) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; к) $(\ln\ln x-1)\ln x+C$.

5.2

1. $\dfrac{3}{2}\ln|2x+5|+C$. **2.** $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}\ln|2x-3|+C$.

3. $x^2-2x+\ln\left|\dfrac{(x+3)^{1\,1/2}x^3}{(x-1)^{3/2}}\right|+C$. **4.** $\ln|x+2|-\dfrac{1}{2(x-2)^2}+C$.

5. $\ln\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$.

5.3

1. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$. **2.** $\dfrac{1}{10}(5x^{4/3}+3)^{3/2}+C$.

3. $4\left(\sqrt[4]{x+3}+\ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right)+C$. **4.** $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$.

5. $-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C$.

6. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x+1}}+\ln\left|\dfrac{x}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3}\right|+C$.

7. $-\dfrac{4}{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}-x+C$. 8. $\sin x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sin x+\sqrt{2}}{\sin x-\sqrt{2}}\right|+C$.

9. $\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$. 10. $\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+C$.

5.4

1. 18. 2. Плюс. 3. $4\leqslant I\leqslant 2\sqrt{30}$.

5.5

1. 29. 2. а) $\dfrac{\sin^2 x}{\ln x+1}$; б) $-\cos\sqrt[3]{x}$. 3. а) 6; б) -2.
4. $-\dfrac{8}{5}$. 5. 1.

5.6

1. а) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $4-\pi$; в) $\ln 2$; г) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$; д) $2\operatorname{arctg}2-\ln\sqrt{5}$; е) $2e-1$.
2. $\sin x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. 3. e^{2x}.

5.7

1. а) 1/3; б) 9. 2. а) $4\pi-6\sqrt{3}$; б) $\dfrac{3\pi}{4}-1$.
3. а) $\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{2}$; б) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$. 4. а) 128π; б) 32.
5. а) 5π; б) $4\pi^2$. 6. а) $\dfrac{12\pi a^2}{5}$; б) $\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\dfrac{2b}{a}\right)$; в) $\dfrac{32\pi a^2}{5}$.

5.8

1. а) $\sqrt{2}$; б) $1+\ln\dfrac{3}{2}$; в) $\pi^3/24$; г) $2\left(e^{2\pi}-1\right)$; д) $\dfrac{15}{16}+\ln 2$; е) 2π. 2. $4a$.
4. $\dfrac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{y-a\sin t}{a\cos t}=\dfrac{z-bt}{b}$ — уравнение касательной; $\dfrac{x-a\cos t}{\cos t}=\dfrac{y-a\sin t}{\sin t}=\dfrac{z-bt}{0}$ — уравнение нормали; $\dfrac{x-a\cos t}{b\sin t}=\dfrac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\dfrac{z-bt}{a}$ — уравнение бинормали; $k=\dfrac{a}{a^2+b^2}$; $T=\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

5. $y=x$ — соприкасающаяся плоскость; $x+y=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ — нормальная плоскость; $z=0$ — спрямляющая плоскость.

5.9

1. $\frac{\pi a^4}{2}$. 2. $\left[\frac{a+b}{2}\operatorname{ch}+\frac{h^2}{6}(a+2b)\right]\rho g$. 3. $\left(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$.
4. $M_x=\frac{32}{3}a^2$; $I_x=\frac{256}{15}a^3$.

5.10

1. а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится; е) сходится; ж) расходится; з) сходится.

6.1

1. $\{-1;\ 0;\ 1\}$.

6.3

1. а) $f'_x(3,\ 2)=56$, $f'_y(3,\ 2)=42$; б) $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$; б) $\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt[4]{z}-\frac{y}{4x\sqrt[4]{y}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=z+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x}{4\sqrt[4]{z^5}}+y$.

5. $du=\frac{z^2}{y^2x^2+z^4}\left(ydx+xdy-\frac{2xy}{z}dz\right)$. 6. 0,75.

7. 4730 ± 100. 8. $z'_u=3u^3\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$, $z'_v=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v)$.

9. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{du}{dx}=\frac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$.

6.4

1. Возрастает, 12. 3. $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\frac{r}{|r|}$. 4. $\sqrt{17+16\ln^2 2}$.

6. $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{(\nabla u,\ \nabla v)}{|\nabla v|}$.

6.5

1. а) $x-y-2z+1=0$; $\frac{x-\pi/4}{1}=\frac{y-\pi/4}{-1}=\frac{z-1/2}{-2}$; б) $2x+7y-$

$-5z+4=0$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$; в) $x+y-4z=0$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=$
$=\frac{z-1}{-4}$.

3. $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$.

6.6

1. $-\frac{y}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, 0. **2.** $\sin y \cos(x+\cos y)$. **4.** Нет.

5. $\begin{vmatrix} 2\ln y & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}$.

6.7

1. а) $-\frac{5}{4}$, $-\frac{21}{32}$; б) -1, 2. **2.** $x-y-z+\frac{\pi}{6}=0$.

3. $r^2\sin\theta$. **5.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$.

6. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$, $x-y=0$.

6.8

1. а) В точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ минимум; б) в точке (1, 0, 2) экстремум отсутствует; в точке (1, 1, 1) максимум. **2.** (1, —1, 6) — точка максимума, (1, —1, —2) — точка минимума.

6.9

1. В точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ максимум. **2.** $\frac{9}{4\sqrt{2}}$. **3.** а) $S=(-2, 0, 0)$; б) $S=$
$=(2, 0, 0)$. **4.** $\max z=2$, $\min z=0$.

7.1

1. $\frac{3}{7}$. **2.** а) $\frac{2y+1}{y^2+y}\sin y\cdot(1+y)-\frac{2y-1}{y^2-y}\sin y\cdot(y-1)$; б) $2ye^{-y^3}-e^{-y^2}-$
$-\int\limits_y^{y^2} x^2e^{-yx^3}dx$.

3. $x(2-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$.

4. $\frac{b}{8a^4}\left[\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right]$. **5.** а) $\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1;\\ \pi\ln a^2, & |a|>1;\end{cases}$ б) $\pi\arcsin a$.

6. $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$.

7.2

2. $u(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,\ x = \pi; \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

7.3

2. а) Сходится равномерно; б) сходится неравномерно. **3.** а) $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$; б) $\ln(1+\alpha)$. **4.** $\ln\frac{b}{a}$.

7.4

4. а) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$; б) $\frac{\beta(\alpha,\ \beta)}{a^{\beta}(1+a^{\alpha})}$; в) $\pi\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi b}{2}}$.

ЛИТЕРАТУРА

Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1980.— Ч. 2.— 432 с.

Зорич В. А. Математический анализ.— М.: Наука, 1981.— Т. 1.— 543 с.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа.— М.: Наука, 1971.— Ч. 1.— 600 с.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа.— М.: Наука, 1973.— Ч. 2.— 448 с.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 1.— 584 с.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 2.— 687 с.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1967.— Т. 1.— 704 с.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.— 671 с.

Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления.— М.: Наука, 1975.— 336 с.

Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1982.— 488 с.

Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики.— М.: Высш. шк., 1973.— Т. 1.— 480 с.

Щипачев В. С. Курс высшей математики.— М.: Изд-во МГУ, 1982.— 326 с.